Analyse 1 : les réels et les fonctions 2011-2012
Contrôle continu n°3 - le lundi 5 décembre 2011, durée 45 minutes

NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :

Fonctions, limites, continuité

1. (10 p.) Étudier pour les fonctions suivantes
- la continuité en tout point de leur domaine,
- leurs limites aux bornes de leurs domaines,
- leur prolongement par continuité éventuel à un domaine plus grand :

1. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$;
2. $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$;
3. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \max\left(x, \dfrac{1}{x}\right)$;
4. $f : \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x \ln(x)}{1 - x}$. On rappelle que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$;
5. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Tournez la page svp →

Tournez la page svp →

2. (7 p.) Soit f une fonction réelle croissante définie sur un intervalle ouvert I.

1. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante convergeant vers un point $a \in I$.
   (a) L'ensemble des images $\{f(x_n)\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ est-il borné ?
   (b) En déduire que la suite $\big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que la fonction f admet en tout point de I une limite à gauche et une limite à droite.

Tournez la page svp $\rightarrow$

3. (3 p.) Déterminer l'image de la fonction $f : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)$. On justifiera la réponse en utilisant des résultats du cours.

Rappeller, svp :
NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :