Analyse 1 : les réels et les fonctions 2012-2013
Contrôle continu n°1 - le vendredi 26 octobre 2012, durée 45 minutes

NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :

Les copies seront jugées essentiellement sur la qualité des raisonnements et sur leur justification rigoureuse. Les calculs sans justification ne seront pas pris en compte. Barème indicatif sur 21 p.

Question de cours. (2 p.) Enoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 1. (3 p.) Résoudre le problème $\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Tournez la page svp →

Exercice 2. (13 p.) Soient :

$$I := [0, \pi], \ f : I \to \mathbb{R}, \ f(x) := \cos x.$$

1. Etudier la monotonie de f.
2. Déterminer $J := f(I)$.
3. Montrer que $f : I \to J$ admet une fonction réciproque f^{-1}. Cette réciproque est notée arccos.
4. Etudier la continuité et la dérivabilité de arccos en un point $y \in J$.
5. Rappelons l'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Là où $\arccos'(y)$ existe, montrer que

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

6. Rappelons que arcsin est la fonction réciproque de $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$, que arcsin est continue et que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]-1, 1[$. En utilisant les rappels, montrer que

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x \in [0, \pi/2].$$

7. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]0, 1[.$$

Tournez la page svp →

Tournez la page svp →

Exercice 3. (3 p.) Soit

$$f :]-\pi/2, \pi, 2[\to \mathbb{R}, \;\; f(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(3x)}{\tan x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 3, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est continue.

Rappeller, svp :
NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :