Analyse 1 : les réels et les fonctions 2012-2013
Contrôle continu n°2 - corrigé

Exercice 1.

1. Résoudre l'équation $y' = 2xy$.
   $y(x) = Ce^{x^2}$.
2. Résoudre l'équation $y' = 2xy - 2x$ et le problème $\begin{cases} y' = 2xy - 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

   Cherchons la solution sous la forme $y(x) = C(x)e^{x^2}$. Nous obtenons

   $$C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2} = 2xC(x)e^{x^2} - 2x \implies C'(x) = -2xe^{-x^2}$$
   $$\implies C(x) = e^{-x^2} + C \implies y(x) = Ce^{x^2} + 1.$$

   La condition initiale $y(0) = 0$ donne $y(x) = 1 - e^{x^2}$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   Soit g la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alors g est quotient de fonctions continues, et le dénominateur est non nul ; donc g est continue.
2. Montrer que f est continue en 0.
   Il suffit de montrer que f est le prolongement par continuité de g en 0, c'est-à-dire que $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Soit $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ telle que $x_n \to 0$. Le théorème des accroissements finis donne l'existence de $y_n \in]0, x_n[$ tel que

   $$g(x_n) = \frac{\sin x_n - \sin 0}{x_n - 0} = \cos y_n.$$

   Le théorème des gendarmes implique $y_n \to 0$, d'où $\cos y_n \to 1$, et donc $g(x_n) \to 1$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   g est quotient de fonctions dérivables, et le dénominateur ne s'annule pas.
4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$.
   Il s'agit d'une limite indéterminée du type $0/0$. En essayant d'appliquer la règle de l'Hôpital, nous calculons $l_1 := \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{2x}$.
   C'est à nouveau une limite du type $0/0$, et en vue de l'applications de la règle de l'Hôpital nous calculons $l_2 := \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2} = 0$. La règle de l'Hôpital donne $l_1 = 0$, et une nouvelle application de la règle donne que la limite de l'énoncé vaut 0.
5. En déduire que f est dérivable en 0. Combien vaut $f'(0)$?
   Nous avons

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x/x - 1}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0,$$

   d'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice 3. Soit $k > 1$. Nous posons

$$x_n := \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \cdots + \frac{1}{n^k}, \quad \text{pour } n = 2, 3, \ldots$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 2}$ a une limite. Nous notons cette limite $f(k)$.
   La suite est croissante.
2. Montrer successivement les inégalités suivantes :

$$\frac{1}{(x+1)^k} < \frac{1}{(k-1)x^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(x+1)^{k-1}} < \frac{1}{x^k},\ \forall\, x > 0,\ \forall\, k > 1, \tag{1}$$

$$\frac{1}{(k-1)n^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(n+1)^{k-1}} < \frac{1}{n^k} \quad \forall\, n \geq 2, \forall\, k > 1, \tag{2}$$

$$\frac{1}{n^k} < \frac{1}{(k-1)(n-1)^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)n^{k-1}}, \quad \forall\, n \geq 2, \forall\, k > 1, \tag{3}$$

$$\frac{1}{(k-1)2^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(n+1)^{k-1}} < x_n < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{(k-1)n^{k-1}},\ \forall\, n \geq 2, \forall\, k > 1, \tag{4}$$

$$\frac{1}{(k-1)2^{k-1}} \leq f(k) \leq \frac{1}{k-1}. \tag{5}$$

   (Pour la preuve de (1), penser au théorème des accroissements finis.)
   Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) := -\dfrac{1}{(k-1)x^{k-1}}$. Pour $x > 0$, le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un $y \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = f'(y),\ \text{càd } \frac{1}{(k-1)x^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(x+1)^{k-1}} = \frac{1}{y^k}.$$

   Comme

$$\frac{1}{(x+1)^k} < \frac{1}{y^k} < \frac{1}{x^k},$$

   nous obtenons

$$\frac{1}{(x+1)^k} < \frac{1}{(k-1)x^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)(x+1)^{k-1}} < \frac{1}{x^k},\ \forall\, x > 0,$$

   càd (1). Nous obtenons (2) (respectivement (3)) en prenant $x = n$ (respectivement $x = n - 1$) dans (1). (4) s'obtient en sommant (2) (respectivement (3)) appliquée avec $n \rightsquigarrow 2, 3, \ldots, n$. (5) s'obtient en faisant $n \to \infty$ dans (4).
3. Calculer $\lim\limits_{k \searrow 1} (k-1) f(k)$.
   De (5), nous avons

$$\frac{1}{2^{k-1}} \leq (k-1) f(k) \leq 1.$$

   Comme $\lim_{k\searrow 1} 2^{k-1} = 1$, le théorème des gendarmes donne $\lim_{k\searrow 1}(k-1)f(k) = 1$.