Analyse 1 : les réels et les fonctions 2012-2013
Contrôle continu n°3 - le vendredi 7 décembre 2012, durée 45 minutes

NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :

Les copies seront jugées essentiellement sur la qualité des raisonnements et sur leur justification rigoureuse. Les calculs sans justification ne seront pas pris en compte. Barème indicatif sur 21 p.

Question de cours. (3 p.) Enoncer le théorème des suites adjacentes.

Exercice 1. (3 p.) Déterminer inf $]-1,1[$. On justifiera la réponse.

Tournez la page svp →

Exercice 2. (5 p.) Nous nous proposons de refaire la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées.

Théorème de Leibniz sur les séries alternées. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante et telle que $a_n \to 0$. Alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge.

Rappelons que, par définition, la convergence de la série revient à : si nous posons

$$x_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n,$$

alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge.

Pour prouver le théorème, posons $z_n := x_{2n}$ et $y_n := x_{2n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer $z_{n+1} - z_n$ et montrer que la suite $(z_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
2. Montrer que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
3. Montrer que les suites $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge.

Tournez la page svp →

Exercice 3. (10 p.) Soit

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) := x + x^2 + \cdots + x^n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, \infty[$.
2. En déduire qu'il existe un et un seul $x_n \in]0, \infty[$ tel que $f_n(x_n) = 1$.
3. Combien vaut $f_{n+1}(x_{n+1})$? Montrer que $f_{n+1}(x_n) > f_{n+1}(x_{n+1})$.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement décroissante.
5. Justifier la convergence de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$.
   Notons $l := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.
6. Montrer que $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2^n}$.
7. En déduire que $x_n > \dfrac{1}{2}$ et que $l \geq \dfrac{1}{2}$.
8. Soit a tel que $\dfrac{1}{2} < a < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(a) = \dfrac{a}{1-a} > 1$.
9. En déduire que, pour un tel a, il existe n_0 tel que $f_n(a) > 1$, $\forall\, n \geq n_0$. En déduire que $x_n < a$, $\forall\, n \geq n_0$, et que $l \leq a$.
10. En déduire que $l = \dfrac{1}{2}$.

Tournez la page svp $\rightarrow$

Rappeller, svp :
NOM, prénom :
Numéro d'étudiant :
Groupe de TD ou nom du chargé de TD :