Université Lyon 1 Licence STS Portail M. Math-Info 1ière année
UE Analyse I : Les réels et les fonctions Année 2013-2014

Contrôle continu final
Le 8 Janvier 2014. Durée 2 heures

Documents et appareils électroniques interdits.

Exercice 1. (10,8 p) Soit

$f: \mathbb{R} \to A$, donné par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & si\ \ x \geq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & si\ \ x < 0 \end{cases}$

Ici A est l'image de f (que l'on déterminera au cours de l'exercice).

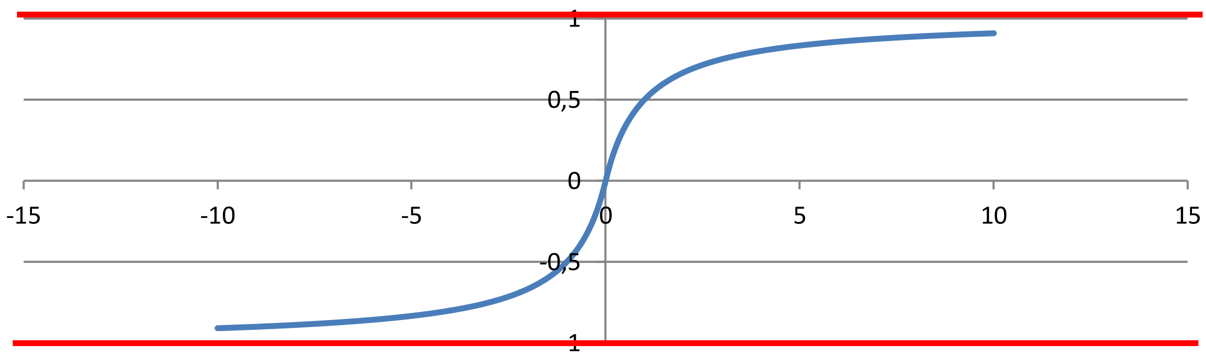
1. (1,8 p) Montrer que f est dérivable.
2. (1,2 p) Montrer que la dérivée f' de f est continue.
3. (0,5 p)Montrer que f' n'est pas dérivable.
4. (0,6 p) Déterminer le tableau de variation de f.
5. $*$ (1,8 p) Tracer le graphe de f. Au passage, étudier l'existence des asymptotes au graphe, et la position du graphe par rapport aux asymptotes
6. (1,2 p)Déterminer l'image A de la fonction f.
7. (0,6p) Montrer que $f: \mathbb{R} \to A$ admet une fonction réciproque, que l'on note $h: A \to \mathbb{R}$.
8. Trouver h.
9. $*$ (1,8 p) Notons g la restriction de f à $]0, +\infty[$, trouver la formule de $g^{(n)}$ (la dérivée n-ième de g) pour $n \geq 1$. On justifiera la réponse.

Correction exercice 1.

1. Si $x \neq 0$ alors f est le quotient de fonctions dérivable donc f est dérivable
   En $x = 0$
   $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{1 + |x|} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$
   Donc f est dérivable en $x = 0$.
2. Si $x > 0$,
   $$f'(x) = \frac{1 \times (1 + x) - x \times 1}{(1 + x)^2} = \frac{1}{(1 + x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$
   Si $x < 0$,
   $$f'(x) = \frac{1 \times (1 - x) - x \times (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$$
   f est continue en 0 et $f'(x)$ admet une limite en 0 donc f est de classe C^1 (donc f' est continue).
3. Si $x > 0$
   $$f''(x) = \frac{-2}{(1 + x)^3} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -2$$
   Si $x < 0$
   $$f''(x) = \frac{2}{(1 - x)^2} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 2$$
   Les limites à gauche et à droite ne sont pas les mêmes donc f' n'est pas dérivable en 0.
4. Que $x < 0$, $x = 0$ ou que $x > 0$, $f'(x) > 0$ dont f est strictement croissante
   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - x} = -1$$
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 + x} = 1$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	1	$+$	
$f(x)$	-1		$\nearrow$		1

5.



Le graphe de f admet deux asymptotes horizontales d'équation $y = -1$ et $y = 1$, la courbe se situe au-dessus de l'asymptotes $y = -1$ et au-dessous l'asymptote d'équation $y = 1$.

6. $A = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]-1,1[$.

7. f est strictement croissante donc f est injective, $f(\mathbb{R}) = A$ donc $f: \mathbb{R} \to A$ est surjective, par conséquent elle admet une bijection réciproque.

8. Pour tout $x < 0$,

$$y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow y(1-x) = x \Leftrightarrow y - xy = x \Leftrightarrow y = x + xy \Leftrightarrow x(1+y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1+y}$$

D'après le tableau de variation $x < 0 \Leftrightarrow y \in]-1,0[$ donc pour tout $y \in]-1,0[$

$$h(y) = \frac{y}{1+y}$$

Pour tout $x \geq 0$,

$$y = \frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = x \Leftrightarrow y + xy = x \Leftrightarrow y = x - xy \Leftrightarrow x(1-y) = y \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

D'après le tableau de variation $x \geq 0 \Leftrightarrow y \in [0,1[$ donc pour tout $y \in [0,1[$

$$h(y) = \frac{y}{1-y}$$

En résumé

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x \in]-1,0[\\ \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x \in [0,1[\end{cases}$$

Donc h est convexe.

9. Pour $x > 0$ alors $g(x) = \frac{x}{1+x}$, on en déduit que

$$g'(x) = \frac{1 \times (1+x) - x \times 1}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

$$g''(x) = -2(1+x)^{-3}; \quad g'''(x) = (-1)^2 \times 3 \times 2(1+x)^{-4}$$

Supposons que

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\,(1+x)^{-(n+2)}$$

C'est vrai pour $n = 0$ (pour $n = 1$ et $n = 2$ aussi)

$$g^{(n+1)}(x) = \left(g^{(n)'}\right)(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!\left(-(n+2)\right)(1+x)^{-(n+3)}$$

$$= (-1)^{n+2}(n+2)!\,(1+x)^{-(n+3)}$$

Ce qui achève la récurrence, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2. (6p)

On considère l'équation différentielle suivante :

(1) $y' = -\frac{y}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, avec $x > 0$.

1. (1,8 p calcul+1,2 pvérification) Montrer que

(2) $y_0 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $y_0(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $x > 0$,

   Est solution de (3).
2. (1,8 p équation homogène+1,2 p sol. général) Trouver toutes les solutions de (3).
3. (0,6 p) Donner la solution de (3) vérifiant $y(1) = \sqrt{2} - 1$
4. (1,8 p) écrire ce qu'il faut faire, calcul, limite, justification) Montrer que la fonction y de la question précédente se prolonge par continuité à droite en 0.

Correction exercice 2.

1. $\forall x > 0,\ y_0(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$y_0'(x) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \times x - \sqrt{x^2+1} \times 1}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$y_0'(x) + \frac{y_0(x)}{x} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} + \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}{x} = \frac{-1}{x^2\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} = \frac{-1 + (x^2+1)}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

   Donc y_0 est bien solution de (3).
2. Il faut chercher la solution générale de l'équation homogène

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \ln|y| = -\ln(x) + K \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$$

   Donc la solution générale de (3) est :

$$y = \frac{\lambda}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

3.

$$y(1) = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \lambda + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$y(x) = \frac{-1 + \sqrt{x^2+1}}{x}$$

4.

$$y(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x} = \frac{x^2 + 1 - 1}{x\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)} = \frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + 1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

   Donc cette fonction est prolongeable par continuité à droite en $x = 0$.

Exercice 3. (6,6 p)

1. (1,2 p) Soit $x > 0$. Montrer qu'il existe un $c = c(x) \in]0, x[$ tel que :

(3) $e^x - 1 = xe^c$

Le but de cet exercice est de préciser la position de c par rapport au milieu $\frac{x}{2}$ de l'intervalle $]0, x[$. Pour ce faire, nous introduisons la fonction :

$f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, donnée par $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x$

2. (1,2 p variation, signe) Dresser le tableau de variation de la dérivée f' de f. Quel est le signe de f' sur $]0, +\infty[$?
3. (1,8 p variation, valeur lim à l'infini) Utiliser la question précédente pour dresser le tableau de variation de f.
4. (0,6 p) En déduire l'inégalité

$$f(x) > 0, \forall x > 0$$

5. (0,6 p) En déduire que
$$e^x - 1 > xe^{\frac{x}{2}}$$
6. (1,2 p) Enfin, obtenir que $c(x) \in \left]\frac{x}{2}, x\right[$.

Correction exercice 3.

1. La fonction exponentielle définie sur $[0, x]$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ tel que
$$e^x - e^0 = (x - 0)e^c \Leftrightarrow e^x - 1 = xe^c$$
2. $f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 1$ et $f''(x) = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

   On a
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} = e^{-\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 0$$
   Et $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$
$$f'(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$$
   On déduit de cela le tableau de variation de f'

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f''(x)$	0 $\qquad$ $+$
$f'(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

   Donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$
3.
$$f(x) = e^{\frac{x}{2}}(1 - e^{-x} - xe^{-x})$$
$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$f(0) = 1 - 1 - 0 = 0$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	0 $\qquad$ $+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

4. Par conséquent, pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.
5. Pour tout $x > 0$
$$f(x) = e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} - x > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} > x \Leftrightarrow e^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right) > xe^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow e^x - 1 > xe^{\frac{x}{2}}$$
6. Pour tout $x > 0$
$$e^x - 1 = xe^c > xe^{\frac{x}{2}}$$
   Comme $x > 0$ cela entraine que $e^c > e^{\frac{x}{2}}$ et que donc $c > \frac{x}{2}$ et d'autre part $c < x$, on a bien l'encadrement souhaiter.

Exercice 4. (6,6 p)

Partie I. Soit $(u_n)_{n\geq1}$ la suite définie par $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$. Pour tout $n \geq 1$, soit

(4)
$$z_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^n u_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} u_j$$

On pose aussi

(5) $x_n = z_{2n}$ et $y_n = z_{2n-1}$, $\forall n \geq 1$

1. (1,2 p) Donner les valeurs de $z_1, z_2, z_3, z_4, x_1, x_2, y_1$ et y_2
2. (1,8 p monotonie (x_n), monotonie (y_n), $y_n - x_n \to 0$) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.
3. (1,2 p) En déduire que la suite $(z_n)_{n\geq 1}$ converge.

Partie II. Dans cette partie, nous considérons une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante et qui converge vers 0. (Attention, il ne s'agit pas forcément de la suite donnée par $u_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$).

Nous définissons les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ par les formules (4) et (5)

4. $*$ (1,8 p monotonie (x_n), monotonie (y_n), $y_n - x_n \to 0$, recollement) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. Conclusion ?

Correction exercice 4.

Partie I.

1.

$$z_1 = u_1 = 1$$
$$z_2 = u_1 - u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$z_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$
$$z_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$
$$x_1 = z_2 = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = z_4 = \frac{7}{12}$$
$$y_1 = z_1 = 1$$
$$y_2 = z_3 = \frac{5}{6}$$

2.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n = z_{2n+2} - z_{2n} \\ &= u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} \\ &- (u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-1}u_{2n}) = (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} = u_{2n+1} - u_{2n+2} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n = z_{2n+1} - z_{2n-1} \\ &= u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1} + (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} \\ &- (u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1}) = (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} = -u_{2n} + u_{2n+1} \\ &= -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} = -\frac{1}{2n(2n+1)} < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est décroissante

$$\begin{aligned} y_n - x_n = z_{2n-1} - z_{2n} \\ &= u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1} - (u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-1}u_{2n-1} + (-1)^{2n-1}u_{2n}) \\ &= -(-1)^{2n-1}u_{2n} = u_{2n} = \frac{1}{2n} \to 0 \end{aligned}$$

Par conséquent les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes.

3. Les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite, comme z_n ne prends que les valeurs de x_n ou de y_n, z_n converge vers cette limite.

Partie II.

4.

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= z_{2n+2} - z_{2n} \\ &= u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} \\ &- (u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-1}u_{2n}) = (-1)^{2n}u_{2n+1} + (-1)^{2n+1}u_{2n+2} \\ &= u_{2n+1} - u_{2n+2} > 0 \end{aligned}$$

Car la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= z_{2n+1} - z_{2n-1} \\ &= u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1} + (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} \\ &- (u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1}) = (-1)^{2n-1}u_{2n} + (-1)^{2n}u_{2n+1} \\ &= -u_{2n} + u_{2n+1} < 0 \end{aligned}$$

Car la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

$$\begin{aligned} y_n - x_n &= z_{2n-1} - z_{2n} \\ &= u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-2}u_{2n-1} \\ &- (u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{2n-1}u_{2n-1} + (-1)^{2n-1}u_{2n}) = -(-1)^{2n-1}u_{2n} = u_{2n} > 0 \end{aligned}$$

Ces deux suites sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite.