Continuité

Analyse 1

12 octobre 2013

En bref

* Limite d’une fonction
* Continuité
* Propriétés de base des fonctions continues
* Théorème des bornes atteintes
* Théorème des valeurs intermédiaires
* Applications

- On se donne $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$
- Le problème de l'existence de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ne se pose que si a est « point d'accumulation » de A : $\exists\,(x_n)_{n \geq 0} \subset A$ tq $x_n \to a$ et $x_n \neq a$ (On note simplement (x_n))
- Si tel est le cas, alors par définition $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \iff$

$$[(x_n) \subset A,\ x_n \neq a,\ x_n \to a] \implies f(x_n) \to l$$

Exercice

Si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, alors le problème de l'existence de $\lim_{x \to -1} f(x)$ ne se pose pas

Solution.

* Si $(x_n) \subset [0, 1]$ et $x_n \to a$, alors $a \in [0, 1]$
* Donc les points hors $[0, 1]$ ne sont pas des points d'accumulation de $[0, 1]$ $\square$

Exercice

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$

Solution.

* a est point d'accumulation de $\mathbb{R}$. En effet, la suite $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$, $x_n := a + \dfrac{1}{n}$, satisfait $x_n \to a$ et $x_n \neq a$, $\forall\, n \geq 1$
* Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tq $x_n \to a$ et $x_n \neq a$, $\forall\, n$ [But : $f(x_n) \to a$]

  Alors $f(x_n) = x_n \to a$ $\square$

Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$

* Si $a \in A$, alors f est continue en $a \iff$

$$[(x_n) \subset A,\ x_n \to a] \implies f(x_n) \to f(a)$$

* f est continue (sur A) si f est continue en tout point $a \in A$

Dans la suite, A sera un intervalle « non dégénéré » (=qui contient plus d'un point). Dans ce cas, nous avons (résultat admis)

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec I intervalle non dégénéré.

* Alors $a \in I \implies a$ point d'accumulation de I
* Pour $a \in I$, nous avons a l'équivalence entre :
  (1) f continue en a, càd

$$[(x_n) \subset I,\ x_n \to a] \implies f(x_n) \to f(a)$$

  (2) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, càd

$$[(x_n) \subset I,\ x_n \neq a,\ x_n \to a] \implies f(x_n) \to f(a)$$

Exercice

Une fonction dérivable est continue

Solution.

- Sous entendu : sur un intervalle non dégénéré I
- Soit $a \in I$. f dérivable en a :

$$[(x_n) \subset I,\ x_n \neq a,\ x_n \to a] \implies \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \to f'(a)$$

- Soit $(x_n) \subset I$ tq $x_n \neq a$ et $x_n \to a$. Alors

$$f(x_n) = f(a) + \underbrace{(x_n - a)}_{\to 0} \underbrace{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}}_{\to f'(a)} \to f(a) \qquad \square$$

Opérations avec les fonctions continues

Résultat provisoirement admis

Proposition

* Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ sont continues (resp. continues en $a \in I$), il en va de même pour :

$$Cf,\ f + Cg\ (C \in \mathbb{R}),\ fg,\ \frac{f}{g}\ (\text{si } g \neq 0)$$

* Si $f : I \to J$ est continue (resp. continue en $a \in I$) et $g : J \to \mathbb{R}$ est continue (resp. continue en $f(a)$), alors $g \circ f$ est continue (resp. continue en a)

Voir travail individuel

Théorème des bornes ; théorème des bornes atteintes

Hypothèse

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue

Conclusion

f a un point de maximum et un point de minimum

Démonstration.

Montrons par ex. l'existence d'un point de maximum

* Soit $M := \sup\{f(x)\,;\ x \in [a, b]\}$
* Alors $\exists\,(x_n) \subset [a, b]$ tq $f(x_n) \to M$
* Soit (x_{n_k}) une sous-suite de (x_n) tq $x_{n_k} \to l \in [a, b]$
* Alors $f(x_{n_k}) \to M$ et $f(x_{n_k}) \to f(l)$
* D'où $f(l) = M$
* D'où l point de maximum de f $\square$

Variation : minima des fonctions coerci(ti)ves

Définition

$f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est coerci(ti)ve si

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \infty \text{ et } \lim_{x \to b-} f(x) = \infty$$

Proposition

Une fonction continue et coerci(ti)ve a un point de minimum

Démonstration.

- Soit $I :=]a,b[$. Soit $m := \inf\{f(x)\,;\ x \in]a,b[\}$. On a $m \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
- Soit $(x_n) \subset I$ tq $f(x_n) \to m$. Soit (x_{n_k}) tq $x_{n_k} \to x$
- On a $x \in [a,b]$. On aussi $f(x_{n_k}) \to m$
- Si $x = a$, alors $m = \infty$ ✂. De même si $x = b$
- Donc $x \in I$
- D'où $f(x) = m$, d'où x point de minimum de f $\square$

Exercice

La fonction $x \mapsto e^x - |x| - x^3 + \sin x$ a un minimum sur $\mathbb{R}$

Solution.

* Soit $f(x) = e^x - |x| - x^3 + \sin x$, $x \in \mathbb{R}$
* f est continue
* Par croissances comparées,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty,$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} e^x = \infty \qquad \square$$

Variation : inégalités de la forme $f \leq Cg$

Proposition

Hypothèses

$*$ $f : [a, \infty[\to [0, \infty[$, $g : [a, \infty[\to]0, \infty[$ continues

$*$ La limite $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe et est finie

Conclusion

$\exists\, C > 0$ tq $f(x) \leq Cg(x)$, $\forall\, x \in [a, \infty[$

Résultat important pour l'étude des séries et des intégrales généralisées

Démonstration.

- Soit $I := [a, \infty[$. Soit $C := \sup\{f(x)/g(x)\,;\, x \in I\}$ [But : $C < \infty$]
- Soit $(x_n) \subset I$ tq $f(x_n)/g(x_n) \to C$. Soit (x_{n_k}) tq $x_{n_k} \to x$
- On a $x \in [a, \infty]$
- Si $x = \infty$, alors $C = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$ ✓
- Sinon, $x \in I$, et donc $C = \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$ ✓ $\square$

Exercice

Il existe $C > 0$ tq $x^3 \leq Ce^x, \forall\, x \geq 0$

Solution.

* Soient $f(x) = x^3 \geq 0$, $g(x) = e^x > 0$, avec $x \geq 0$
* Alors f, g continues et

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ (croissances comparées)} \qquad \square$$

Théorème des valeurs intermédiaires ; TVI

Hypothèses

* $f : I \to \mathbb{R}$ continue
* $x, y \in I$, $t \in \mathbb{R}$ sont tels que $f(x) < t < f(y)$

Conclusion

Il existe $c \in I$ tel que $f(c) = t$

Remarque

Donc

$$[s,\ u \in f(I),\ s < t < u] \implies t \in f(I)$$

Càd $f : I \to \mathbb{R}$ continue $\implies f(I)$ intervalle

Démonstration.

- $*$ OPS $x < y$
- $*$ Soit $A := \{z \in [x, y]\,;\, f(z) < t\}$. On a $x \in A$ (d'où A non vide)
- $*$ Soit $c := \sup A$. Soit $(x_n) \subset A$ tq $x_n \to c$
- $*$ Alors $c \in [x, y] \subset I$ et $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leq t$ (d'où $c < y$)
- $*$ On va montrer, par l'absurde, que $f(c) \not< t$ [D'où $f(c) = t$]
- $*$ Sinon : pour n grand $f\left(c + \dfrac{1}{n}\right) < t$, d'où c n'est pas majorant de A ✄

$\square$

Exercice

Un train part de la ville A vers la ville B sur l'unique voie qui relie les deux villes. Le départ est à 9 heures, l'arrivée à 15 heures
Le lendemain, le train part de B à 9 heures et arrive à A à 15 heures
Montrer qu'il existe un moment dans la journée pendant lequel le train s'est trouvé au même endroit les deux jours

Solution.

- Notons $f(t)$ la « position » (=abscisse curviligne à partir de A) du train à l'instant $t \in [9, 15]$ le premier jour. On définit de même $g(t)$
- f et g sont continues, et $f(9) - g(9) < 0$, alors que $f(15) - g(15) > 0$
- D'où $f(t) = g(t)$ pour un $t \in [9, 15]$ $\square$

Corollaire

Hypothèses

$*$ $f : I \to \mathbb{R}$ continue

$*$ f injective

Conclusion

f strictement monotone

Voir travail individuel

Proposition

Hypothèses
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et croissante
Conclusion
$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

Démonstration.

* Si $x \in [a, b]$, alors $f(x) \in [f(a), f(b)]$, d'où « $\subset$ »
* Si $f(a) < t < f(b)$, alors $\exists\, x \in]a, b[$ tq $f(c) = t$
* D'où $]f(a), f(b)[\subset f(]a, b[)$
* D'où la conclusion $\square$

Généralisations : voir travail individuel

Théorème

Hypothèses

$f : I \to J$ continue et bijective

Conclusion

$f^{-1} : J \to I$ continue

« La réciproque d'une fonction continue est continue »

Deux outils dans la preuve

Théorème des gendarmes

Si

$$y_n \leq x_n \leq z_n,\ y_n \to l \text{ et } z_n \to l, \text{ alors } x_n \to l$$

...et « réciproquement »

Lemme

Si $(x_n) \subset [a,b]$ et $x_n \to l$, alors $\exists\,(y_n),(z_n) \subset [a,b]$ tq

$$a \leq y_n \leq x_n \leq z_n \leq b,\ \ y_n \nearrow l \text{ et } z_n \searrow l$$

Preuve de la continuité de f^{-1}.

- On suppose par ex. $I = [a, b]$, f strictement croissante
- Soient $x \in J := [f(a), f(b)]$ et $(x_n) \subset J$ tq $x_n \to x$ [But : $f^{-1}(x_n) \to f^{-1}(x)$]
- Soient $(y_n), (z_n) \subset J$ tq

$$z_n \leq x_n \leq y_n,\ y_n \nearrow x,\ z_n \searrow x$$

  Posons $X_n := f^{-1}(x_n)$, etc. [But : $X_n \to f^{-1}(x)$]
- Alors $a \leq Y_n \leq X_n \leq Z_n \leq b$, $Y_n \nearrow$, $Z_n \searrow$
- Notons $Y := \lim_{n\to\infty} Y_n \in [a, b]$, $Z := \lim_{n\to\infty} Z_n \in [a, b]$
- Alors $y_n = f(Y_n) \to f(Y)$ et $z_n \to f(Z)$
- D'où $Y = Z = f^{-1}(x)$. D'où $X_n \to f^{-1}(x)$ $\square$

Proposition

Soit $f : I \to J$ dérivable bijective. Soient $x \in I$ et $y := f(x)$. Alors

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } y \iff f'(x) \neq 0,$$

et si $f'(x) \neq 0$ alors $\left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$

Cas particulier : si $f' \neq 0$ sur I, alors f^{-1} est dérivable et $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Démonstration.

- Si f^{-1} dérivable en y, alors
$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x) = 1, \text{ d'où } f'(x) \neq 0$$
- Supposons $f'(x) \neq 0$. Soit $(y_n) \subset J$ tq $y_n \to y$ et $y_n \neq y$
- Soit $x_n := f^{-1}(y_n)$, de sorte que $x_n \to x$ et $x_n \neq x$
- Alors
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)}$$
- D'où la conclusion $\square$

Exercice

Déduire la dérivée du ln à partir de la dérivée de l'exponentielle

Solution.

* $\exp : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ est dérivable et bijective (voir aussi travail individuel)
* On a $\exp' > 0$, d'où ln dérivable
* Si $y = e^x$, alors

$$\ln'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

* D'où $\ln'(y) = \frac{1}{y}, \forall\, y > 0$

$\square$

Travail individuel

* On prend comme garanties les propriétés des limites de suites. (Par ex., si $x_n \to l$ et $y_n \to L$, et si $l + L$ a un sens, alors $x_n + y_n \to l + L$.) Montrer les propriétés des opérations sur les fonctions continues
* Preuve de l'implication « continue + injective $\implies$ strictement monotone ». Notes de cours, Thm 4.5, p. 30
* Image de $f(I)$, avec f continue strictement monotone. Notes de cours, Prop. 4.6, pp. 30–31