Dérivées : calcul et applications

Analyse 1

13 septembre 2013

Buts

* Une présentation rapide de la notion de dérivée
* Présentation (sans preuves) :
  1. Des règles de calcul des dérivées
  2. Des dérivées des fonctions usuelles
  3. Des applications du calcul des dérivées (monotonie, convexité, étude des fonctions, obtention d'inégalités)
* Les preuves rigoureuses seront présentées plus tard

Tangente et cordes

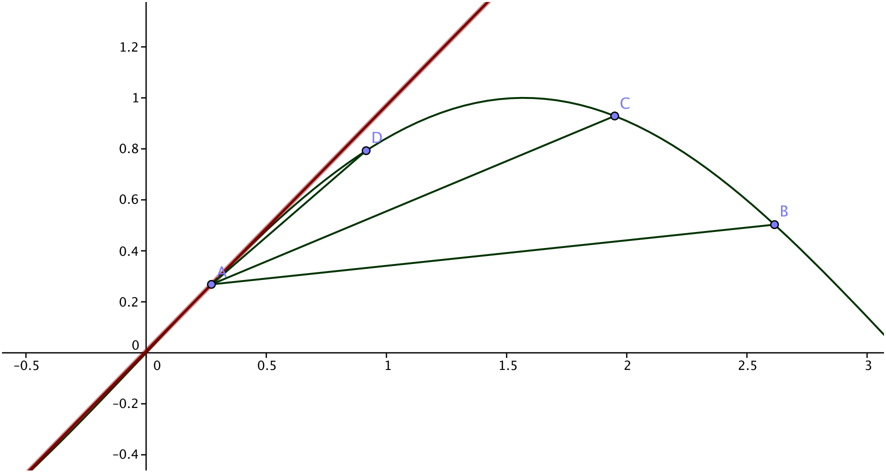

FIGURE : Tangente et cordes au graphe de sin en $x = 0,25$

Présentation intuitive de la tangente et de la dérivée

On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

* La tangente au graphe de f en x (ou plutôt en $(x, f(x))$) est la droite qui approche le mieux le graphe de f
* Son coefficient directeur $f'(x)$ est la limite des coefficients directeurs des cordes :

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \underbrace{\frac{f(y) - f(x)}{y - x}}_{\text{pente de la corde entre } (x, f(x)) \text{ et } (y, f(y))} = \underbrace{\lim_{h \to 0}}_{\text{changement de variable } y = x + h} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De même si $f : I \to \mathbb{R}$, avec I intervalle, et si $x \in I$

Equation de la tangente en $(x_0, f(x_0))$

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$$

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Alors la tangente en $(2, 4)$ (ou encore en $x_0 = 2$, par abus) est d'équation $y = 4x - 4$

Exemples et règles de calcul

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x \implies f'(x) = 1$

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$

Exemple

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x} \implies f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ si } x > 0$$

Notation correcte et abus de notation

- $(x \mapsto x^2)'(a) = 2a$
- $(x^2)' = 2x$ (abus de notation pour : la dérivée de $x \mapsto x^2$ calculée en x vaut $2x$)

Dérivées des fonctions usuelles

Proposition

Avec l'abus de notation « usuel »

* $(x^n)' = nx^{n-1}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in \mathbb{R}$
* $(e^x)' = e^x, \forall\, x \in \mathbb{R}$
* $(a^x)' = (\ln a)\; a^x, \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, a > 0$ (a constante)
* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}, \forall\, x > 0$

Dérivées des fonctions usuelles

Proposition - suite

Avec l'abus de notation « usuel »

- $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}, \forall\, n \in \mathbb{N},\, n \geq 2, \forall\, x > 0$
- La formule ci-dessus reste vraie si n est impair et $x < 0$
- $\sin' = \cos$
- $\cos' = -\sin$

Quelques fonctions usuelles

Définition-théorème

* $x \mapsto e^x$ est la seule fonction $f : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$
* $\ln :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est la réciproque de $x \mapsto e^x$
* $a^x = e^{(\ln a)x}, \forall\, a > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$
* $x \mapsto x^{1/n}$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) est la réciproque de $x \mapsto x^n$
  (1) de $[0, \infty[$ vers $[0, \infty[$ si n est pair
  (2) de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ si n est impair

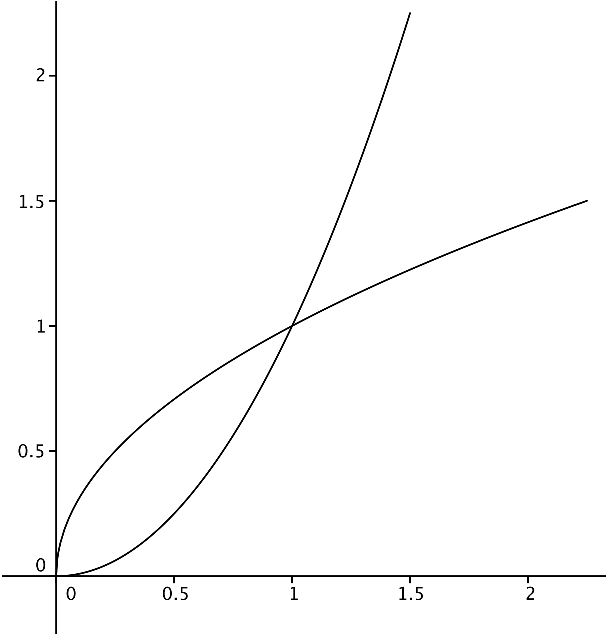

FIGURE : $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$

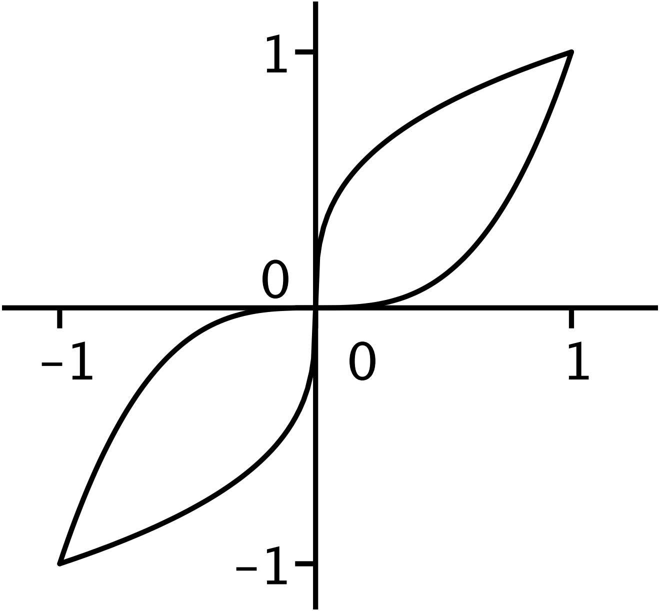

FIGURE : $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$

Quelques définitions et notations

* I, J désignent toujours des intervalles
  Dans ce qui suit, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$. Par définition :
* f est dérivable en x si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

  existe (et est finie)
* f est dérivable si f est dérivable en tout point $x \in I$
* f est continue en x si

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x), \text{ ou encore } \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

* f est continue si f est continue en tout point de x
* Les définitions ci-dessus se déclinent « à gauche » et « à droite », en remplaçant les limites par des limites à gauche et à droite

Règles de calcul

Proposition

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Soit $C \in \mathbb{R}$. Alors

* Cf dérivable et $\boxed{\text{(Cf)'=Cf'}}$
* $f + g$ dérivable et $\boxed{\text{(f+g)'=f'+g'}}$
* fg est dérivable et $\boxed{\text{(fg)'=f'g+fg'}}$
* Si, de plus $g \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2}}$$

Conclusions analogues si f, g sont dérivables en $x \in I$

Exemples

Avec l'abus « usuel »

- $(x^3 + 2\sin x)' = 3x^2 + 2\cos x$
- $(x^3 \sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$
- (Si $x \neq 0$) $\left(\dfrac{\sin x}{x^3}\right)' = \dfrac{\cos x}{x^3} - 3\dfrac{\sin x}{x^4}$

Règle de calcul

Proposition

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et

$$\boxed{(g \circ f)' = g' \circ f\, f'}, \text{ c'est-à-dire}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x), \ \forall\, x \in I$$

Conclusions analogues si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$

Exemples

Avec l'abus « usuel »

* $(\sin(e^x))' = \cos(e^x)\, e^x$
* $\left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Règles de calcul

En ajoutant les bonnes hypothèses (lesquelles ?), nous avons

* $\boxed{\left(e^{f}\right)' = e^{f} f'}$
* $\boxed{(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}}$
* $\boxed{(f^{n})' = n f^{n-1} f'}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$
* $\boxed{\left(\dfrac{1}{f^{n}}\right)' = -n \dfrac{f'}{f^{n+1}}}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

Fonctions qui ne sont pas dérivables

Proposition

Une fonction dérivable est continue
Une fonction dérivable en x est continue en x

Par contraposée

Une fonction qui n'est pas continue n'est pas dérivable
Une fonction qui n'est pas continue en x n'est pas dérivable en x

Exemple

La fonction « à accolade » $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0

Fonctions qui ne sont pas dérivables

Proposition

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $x \in I$. Sous les hypothèses suivantes :

- f est continue sur I
- f est dérivable sur $I \setminus \{x\}$

et

1. Soit l'une des limites $\lim\limits_{y \to x-} f'(y)$ et $\lim\limits_{y \to x+} f'(y)$ est infinie
2. Soit les limites latérales $\lim\limits_{y \to x-} f'(y)$ et $\lim\limits_{y \to x+} f'(y)$ existent mais ne sont pas égales

la fonction f n'est pas dérivable en x

Exemple

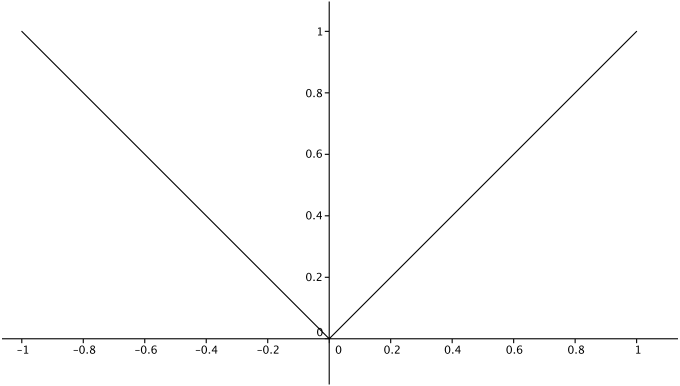

FIGURE : $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0

Monotonie

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors

* $f' > 0 \implies f$ strictement croissante
* $f' > 0$ sauf en un nombre fini de points $\implies f$ strictement croissante
* $f' \geq 0 \iff f$ croissante

Conclusions analogues pour « $<$ » ou « $\leq$ »

Monotonie

Théorème de Darboux

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si $f' \neq 0$, alors f' ne change pas de signe sur I
(donc soit $f' > 0$ sur I, soit $f' < 0$ sur I)

Application : tableau de variation

Etudier la monotonie de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x$

* $f'(x) = e^x - 1$
* $f'(x) = 0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	1	$\nearrow$	∞

Application : preuve d'une inégalité

Montrer que $\sqrt[3]{x} \leq \frac{x}{3} + \frac{2}{3}$, $\forall\, x \geq 0$

* On pose $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{2}{3} - \sqrt[3]{x}$. On doit m. q. $f(x) \geq 0$, $\forall\, x \geq 0$
* $f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $\forall\, x > 0$

x	0		1		∞
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞

Dérivées d'ordre supérieur

Définition, notation

Soit $f : I \to \mathbb{R}$

* La dérivée seconde de f est $f'' := (f')'$
* Par récurrence, la dérivée n^{e} est la dérivée de la dérivée $(n-1)^{\text{e}}$ et est notée $f^{(n)}$

Exemple

$$\ln^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}, \forall\, x > 0$$

Convexité : interprétation graphique

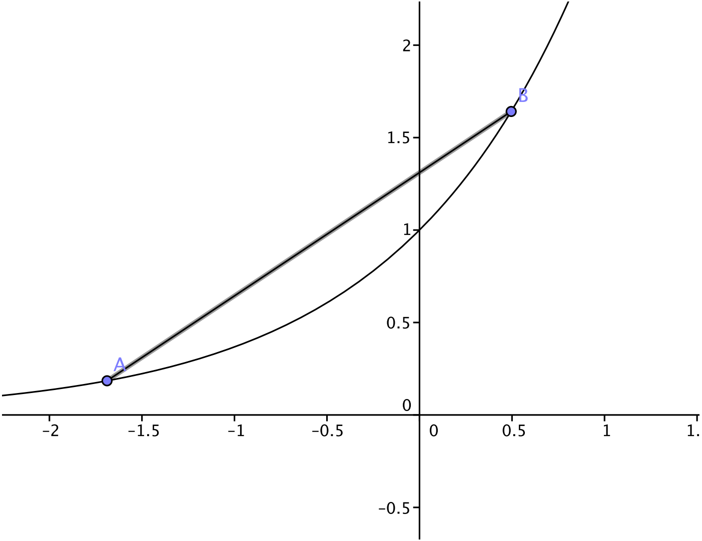

FIGURE : e^x est convexe : les cordes sont au-dessus du graphe

Convexité : interprétation graphique

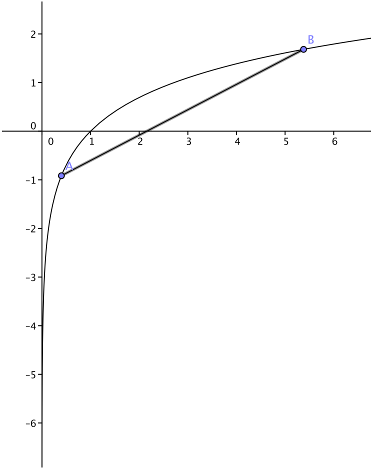

FIGURE : ln est concave : les cordes sont en dessous du graphe

Convexité : interprétation graphique

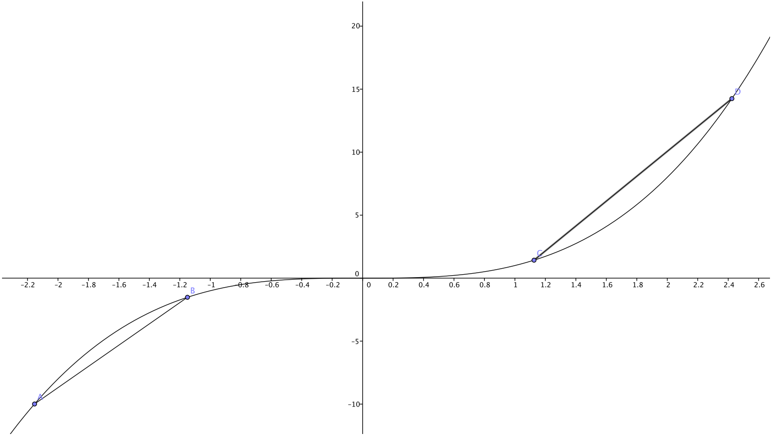

FIGURE : x^3 n'est ni convexe, ni concave. 0 est un point d'infléxion : la convexité change en 0 (fonction convexe sur $[0, \infty[$, concave sur $]-\infty, 0]$)

Convexité

Définition

$f : I \to \mathbb{R}$ est convexe (resp. concave) ssi

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y),\ \forall\, x, y \in I,\ \forall\, t \in [0, 1]$$

resp.

$$f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y),\ \forall\, x, y \in I,\ \forall\, t \in [0, 1]$$

Convexité

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante} \iff f'' \geq 0$$

resp.

$$f \text{ concave} \iff f' \text{ décroissante} \iff f'' \leq 0$$

Asymptotes

Définition vague

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Une fonction asymptote (au graphe) de f en $+\infty$ est une « fonction usuelle » g telle que $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x)) = 0$
Le graphe de g est une courbe asymptote au graphe de f en $+\infty$
Les définitions s'adaptent en $-\infty$, ou pour $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$, etc.

Exemple

Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Alors $g(x) = x$ est fonction asymptote de f en $+\infty$ et la droite $y = x$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$

Etude de fonctions : un exemple

Dresser le graphe de la fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$,
$f(x) = x + \dfrac{1}{x-1}$, avec D_f le « domaine naturel de définition de f »

* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
* $f'(x) = 0 \iff 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2} = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$
* $f''(x) \begin{cases} > 0, & \text{si } x > 1 \\ < 0, & \text{si } x < 1 \end{cases}$
* $y = x$ asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$
* le graphe de f est : au-dessus de l'asymptote si $x > 1$, en dessous si $x < 1$

Etude de fonctions : un exemple

En étudiant le signe de f', on obtient

x	$-\infty$		0		1		2		∞
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	1
$f''(x)$		$-$		$-$	$\|$	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \,\|\, \infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	∞

Etude de fonctions : un exemple

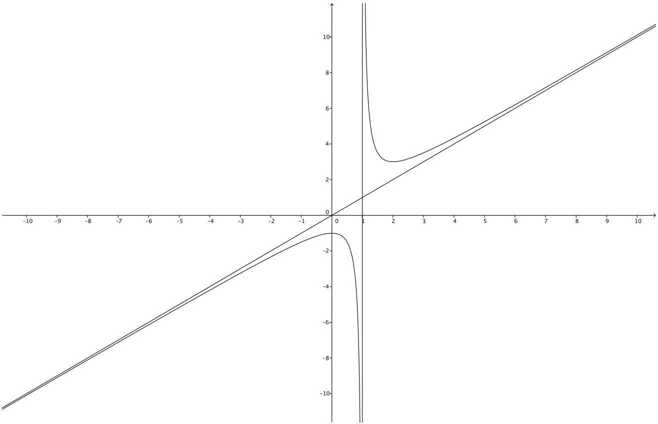

FIGURE : $x = 1$ est asymptote verticale. $y = x$ est asymptote (oblique) en $+\infty$ et en $-\infty$. Le graphe rend compte de la convexité de f et de la position de f par rapport à l'asymptote