Epsilon

Analyse 1

8 novembre 2013

En bref

* But du jeu : voir les raisonnements les plus simples avec ε (epsilon)
* Justification de quelques propriétés des limites de suites en utilisant ces raisonnements
* « Principe 2ε ». Application : « principe du majorant »
* « Principe du plus grand des n_0 ». Applications : limite des sommes, recollement, théorème des gendarmes
* « Principe du ε particulier ». Applications : limites des produits, définition de la continuité avec ε et δ
* Quelques suites importantes
* Le début de l'analyse « conceptuelle » : suites de Cauchy. Application : méthode des approximations successives de Picard

Principe 2ε

Rappel

Par définition, $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ssi

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \text{ tq } |x_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0$$

Exercice

Calculer le plus petit n_0 si $x_n = \dfrac{1}{n}$ et $\varepsilon = 10^{-1}$, ou $\varepsilon = 10^{-2}$

Solution.

* On a $\ell = 0$
* On a (1) $|x_n - \ell| < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \dfrac{1}{\varepsilon}$
* Si $\varepsilon = 10^{-1}$, alors (1) $\iff n > 10$, et donc le plus petit n_0 qui convienne est $n_0 = 11$
* Si $\varepsilon = 10^{-2}$, alors $n_0 = 101$ convient $\square$

Remarques

Donc, en général, n_0 dépend de ε
Si nécessaire, on écrit $n_0 = n_0(\varepsilon)$ pour souligner la dépendance de n_0 par rapport à ε

n_0 n'est pas unique
Dans l'exemple précédent, tout $n_0 \geq 11$ peut être pris comme $n_0(10^{-1})$

Plus généralement, si m peut jouer le rôle de n_0, alors tout $k \geq m$ peut jouer ce rôle

Principe 2ε

Principe 2ε

Pour prouver la convergence $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, il suffit de trouver (pour tout $\varepsilon > 0$) n_0 tq $|x_n - \ell| < 2\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$...

...bien que cette inégalité soit plus faible que $|x_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$

Démonstration.

Si $n \geq n_0(\varepsilon/2)$, alors nous avons $|x_n - \ell| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\square$

Principe 2ε

Travail individuel

* Enoncer et prouver le principe 10ε
* Enoncer et prouver le principe ε^2

Nous avons le principe suivant (admis)

Principe $g(\varepsilon)$

Soit $g : [0, \infty[\to [0, \infty[$ continue et telle que $g(0) = 0$

Pour prouver la convergence $x_n \to l \in \mathbb{R}$, il suffit de trouver (pour tout $\varepsilon > 0$) n_0 tq $|x_n - l| \leq g(\varepsilon), \forall\, n \geq n_0$

Remarque

Le principe fonctionne aussi si on obtient « $< g(\varepsilon)$ » au lieu de « $\leq g(\varepsilon)$ »

Principe 2ε

Ainsi, pour prouver que $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, la stratégie est la suivante :

* On se donne $\varepsilon > 0$ (« Soit $\varepsilon > 0$ »)
* On cherche n_0 tq $|x_n - \ell| \leq g(\varepsilon)$, $\forall\, n \geq n_0$ (avec g convenable)
* Variante : on montre que $|x_n - \ell| < g(\varepsilon)$, $\forall\, n \geq n_0$

Application : principe du majorant

Principe du majorant

Hypothèses

* $|x_n - \ell| \leq C y_n, \forall\, n$
* $y_n \to 0$, $C > 0$ constante

Conclusion

$x_n \to \ell$

Démonstration.

* Soit $\varepsilon > 0$
* Soit n_0 tq $|y_n| = y_n < \varepsilon, \forall\, n \geq n_0$
* Alors $|x_n - \ell| < C\varepsilon, \forall\, n \geq n_0$
* On conclut grâce au principe $C\varepsilon$ □

Principe du majorant

Exercice d'application

On a $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+2\sin n^2}{n} = 0$

Solution.

* On a

$$\left|\frac{1+2\sin n^2}{n} - 0\right| = \frac{|1+2\sin n^2|}{n} \leq 3\frac{1}{n}$$

* On applique le principe du majorant avec $y_n := \dfrac{1}{n}$ et $C = 3$ $\square$

Principe du plus grand des n_0

Principe du plus grand des n_0

Si la propriété (P1) est vraie pour $n \geq n_1$, et si la propriété (P2) est vraie pour $n \geq n_2$, alors les propriétés (P1) et (P2) sont vraies (en même temps) pour $n \geq n_0$, où

$$n_0 := \max\{n_1, n_2\}$$

Application : limite de la somme

Proposition

Hypothèses $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $y_n \to L \in \mathbb{R}$
Conclusion $x_n + y_n \to \ell + L$

Démonstration.

* Soit $\varepsilon > 0$. Soient n_1, n_2 tq

$$|x_n - \ell| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_1 \text{ et } |y_n - L| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_2$$

* Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Si $n \geq n_0$, alors

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (\ell + L)| &= |(x_n - \ell) + (y_n - L)| \\ &\leq |x_n - \ell| + |y_n - L| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

* On conclut grâce au principe 2ε $\square$

Application : théorème des gendarmes

Théorème des gendarmes

Hypothèses

* $y_n \leq x_n \leq z_n$
* $y_n \to \ell \in \mathbb{R}$, $z_n \to \ell$ (même ℓ)

Conclusion

$x_n \to \ell$

Il existe des variantes de ce résultat si $\ell = \infty$ ou $\ell = -\infty$ (voir feuille d'exercices no 4)

Application : théorème des gendarmes

Démonstration.

* Soit $\varepsilon > 0$. Soient n_1, n_2 tq

$$|y_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_1 \text{ et } |z_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_2$$

* Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Si $n \geq n_0$, alors

$$\ell - \varepsilon < y_n \leq x_n \leq z_n < \ell + \varepsilon \text{ et donc } \ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$$

* D'où $|x_n - \ell| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$ $\square$

Application : recollement

Formulation vague

Si une suite (x_n) « se casse » en plusieurs sous-suites, toutes avec la même limite ℓ, alors $x_n \to \ell$

L'hypothèse clé est que ℓ ne dépend pas de la sous-suite

Application : recollement

Voici une formulation rigoureuse d'un cas particulier de recollement

Proposition

Hypothèses

* $(x_{\varphi(n)})$ et $(x_{\psi(n)})$ sous-suites de (x_n)
* Tout entier m est soit de la forme $\varphi(n)$, soit de la forme $\psi(n)$. Càd :

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tq soit } m = \varphi(n),\ \text{ soit } m = \psi(n)$$

* $x_{\varphi(n)} \to \ell$ et $x_{\psi(n)} \to \ell$ (même ℓ)

Conclusion

$x_n \to \ell$

Application : recollement

Exemples

* Si $x_{2n} \to \ell$ et $x_{2n+1} \to \ell$ (même ℓ), alors $x_n \to \ell$
* Si $x_{2n+1} \to \ell$, $x_{3n+1} \to \ell$, $x_{3n+2} \to \ell$ et $x_{6n} \to \ell$ (même ℓ), alors $x_n \to \ell$

Travail individuel : reprendre, dans le poly sur le sup, l'exercice sur la suite (z_n) donnée par

$$z_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \ \forall\, n \geq 1,$$

et montrer que (z_n) converge

Application : recollement

Preuve si $\ell \in \mathbb{R}$.

- Soit $\varepsilon > 0$. Soient n_1, n_2 tq
$$|x_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_1 \text{ et } |x_{\psi(n)} - \ell| < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_2$$
- Soit $n_0 := \max\{\varphi(n_1), \psi(n_2)\}$
- Soit $m \geq n_0$. Soit n tq $m = \varphi(n)$ ou $m = \psi(n)$
- Si $m = \varphi(n)$, alors $n \geq n_1$. De même : si $m = \psi(n)$, alors $n \geq n_2$
- Dans les deux cas : $|x_m - \ell| < \varepsilon, \forall\, m \geq n_0$ $\square$

Travail individuel

- Examiner les cas où $\ell = \infty$ ou $\ell = -\infty$
- Etudier le cas de plusieurs sous-suites. Notes de cours, Poroposition 5.16, p. 40

Principe du ε particulier

Principe du ε particulier

Une propriété vraie pour tout ε est vraie pour des valeurs particulières de ε

Application : une suite convergente est bornée

Proposition

Une suite convergente est bornée

Càd : si $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ tq $a \leq x_n \leq b$, $\forall\, n$

Application : une suite convergente est bornée

Démonstration.

- On prend $\varepsilon = 1$ dans la définition de la convergence. Soit n_0 tq $|x_n - \ell| < 1, \forall\, n \geq n_0$
- On a donc $\ell - 1 < x_n < \ell + 1, \forall\, n \geq n_0$
- On obtient $a \leq x_n \leq b$, avec

$$a := \min\{\ell - 1, x_0, \ldots, x_{n_0-1}\},$$

$$b := \max\{\ell + 1, x_0, \ldots, x_{n_0-1}\} \qquad \square$$

Travail individuel : si $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe M tq $|x_n| \leq M, \forall\, n$

Application : limite d'un produit

Proposition

Hypothèses

$x_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $y_n \to L \in \mathbb{R}$

Conclusion

$x_n y_n \to \ell L$

Application : limite d'un produit

Démonstration.

- Soit M tq $|x_n| \leq M, \forall\, n$
- Soit $\varepsilon > 0$. Soient n_1, n_2 tq

$$|x_n - \ell| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_1 \text{ et } |y_n - L| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_2$$

- Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Si $n \geq n_0$, alors

$$\begin{aligned} |x_n y_n - \ell\, L| &= |x_n y_n - x_n L + x_n L - \ell\, L| \\ &\leq |x_n y_n - x_n L| + |x_n L - \ell\, L| \\ &= |x_n||y_n - L| + |x_n - \ell||L| \\ &\leq M\varepsilon + |L|\varepsilon = (M + |L|)\varepsilon \end{aligned}$$

- On conclut grâce au principe $C\varepsilon$ $\square$

Application : continuité avec $\varepsilon - \delta$

Rappel

Si $f : A \to \mathbb{R}$ et $x \in A$, alors f est continue en x ssi

$$[(x_n) \subset A,\ x_n \to x] \implies f(x_n) \to f(x)$$

Application : continuité avec $\varepsilon - \delta$

Proposition

Hypothèses

* $f : A \to \mathbb{R}$
* $x \in A$

Conclusion

f continue en x ssi $\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0$ tq

$$[y \in A, |y - x| < \delta] \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon$$

Application : continuité avec $\varepsilon - \delta$

Démonstration de « $\Longrightarrow$ ».

* Par l'absurde : $\exists\, \varepsilon > 0$ tq $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, y \in A$ tq $|y - x| < \delta$ et $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$
* Prenons un δ particulier : $\delta := \dfrac{1}{n}$. Soit $y = y_n$ comme ci-dessus
* Alors (1) $y_n \in A$, $|y_n - x| < \dfrac{1}{n}$, et (2) $|f(y_n) - f(x)| \geq \varepsilon$, $\forall\, n$
* De (1) et du principe du majorant, nous avons (3) $y_n \to x$
* Si $n \geq n_0(\varepsilon)$, (2) et (3) contredisent $f(y_n) \to f(x)$ ✂ $\square$

Application : continuité avec $\varepsilon - \delta$

Travail individuel

* Preuve de « $\Longleftarrow$ ». Voir notes de cours, Proposition 4.9, pp. 31-32
* Caractérisation de la limite $\lim_{y \to x} f(y)$ avec $\varepsilon - \delta$. Notes de cours, Proposition 6.1, p. 43

Quelques suites importantes

Suite arithmétique

* $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_n := x_{n-1} + a$, $\forall\, n \geq 1$, avec $a \in \mathbb{R}$ constante
* Terme général : $x_n = x_0 + na$, $\forall\, n \geq 0$
* Limite : $x_n \to \begin{cases} \infty, & \text{si } a > 0 \\ -\infty, & \text{si } a < 0 \\ x_0, & \text{si } a = 0 \end{cases}$

Quelques suites importantes

Suite géométrique

$x_0 \in \mathbb{R}$, $x_n := q\, x_{n-1}$, $\forall\, n \geq 1$, avec $q \in \mathbb{R}$ constante

* Terme général : $x_n = x_0\, q^n$, $\forall\, n \geq 0$
* Limite si $x_0 = 1$: $x_n \to \begin{cases} 0, & \text{si } -1 < q < 1 \\ 1, & \text{si } q = 1 \\ \infty, & \text{si } q > 1 \\ \text{n'existe pas}, & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$

Quelques suites importantes

Calcul de $\lim_{n\to\infty} x_n$

- Pour $q \geq 0$, voir feuille 4 TD
- Si $-1 < q$, alors $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$. Grâce au théorème des gendarmes, nous obtenons $q^n \to 0$
- Si $q = -1$, alors $x_{2n} \to 1$ et $x_{2n+1} \to -1$. On conclut grâce à l'absence de recollement
- Raisonnement analogue si $q < -1$: nous avons $x_{2n} \to \infty$ et $x_{2n+1} \to -\infty$

Suites de Cauchy

Motivation : étudier la convergence d'une suite (x_n) sans aucune information sur sa monotonie

Définition

Une suite (x_n) est de Cauchy ssi : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ tq

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \ \forall\, m, n \geq n_0$$

Théorème

(x_n) converge ssi (x_n) est une suite de Cauchy

Travail individuel : preuve de « $\implies$ ». Notes de cours, Théorème 5.18, p. 41

Suites de Cauchy

Preuve de « $\Longleftarrow$ ».

* Posons $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, $y_n := \inf A_n$ et $z_n := \sup A_n$
* Nous avons $y_n \leq x_n \leq z_n$, $\forall\, n$
* Soit $\varepsilon > 0$. Si $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$, alors $x_n - \varepsilon$ est un minorant de A_n et $x_n + \varepsilon$ est un majorant de A_n
* D'où $z_n - y_n \leq 2\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$
* Nous obtenons $z_n - y_n \to 0$ (principe 2ε)
* Le théorème des suites adjacentes donne $y_n \to \ell \in \mathbb{R}$ et $z_n \to \ell$ (même ℓ)
* Le théorème des gendarmes implique $x_n \to \ell$ $\square$

Résultat admis

Proposition

Une suite (x_n) est de Cauchy (donc converge) ssi $\exists\, \varepsilon_n$ tq

* $|x_m - x_n| \leq \varepsilon_n, \forall\, m > n$
* $\varepsilon_n \to 0$

Application : méthode de Picard

Définition

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors f est contractante ssi : $\exists\, k < 1$ tq $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$

Application : méthode de Picard

Exemple

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{3}$, est contractante

Solution.

* On a $f'(x) = \dfrac{1 - \cos x}{3}$, d'où $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{3}$
* Le TAF donne $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{2}{3}|x - y|, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$ $\square$

Application : méthode de Picard

Proposition

Hypothèse
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contractante

Conclusions

* Il existe un (seul et un seul) $c \in \mathbb{R}$ tq $f(c) = c$
* Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite de Picard, donnée par $x_n := f(x_{n-1}), \forall\, n \geq 1$, converge vers c

Travail individuel : unicité de c. Voir feuille 5 de TD

Application : méthode de Picard

Démonstration de « $x_n \to c$ ».

- Par récurrence sur $n \geq 0$, nous avons $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$
- Si $m > n$, alors

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \\ &\leq |x_m - x_{m-1}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq \frac{|x_1 - x_0|}{1-k} k^n := \varepsilon_n \end{aligned}$$

- Nous avons $\varepsilon_n \to 0$ (car $0 \leq k < 1$)
- Donc (x_n) est une suite de Cauchy
- Soit $c := \lim_{n\to\infty} x_n$
- Alors $x_{n+1} = f(x_n) \implies c = f(c)$ $\square$