Université Lyon 1 | Licence STS Portail Math-Info $1^{\text{ère}}$ année
UE Analyse I : les réels et les fonctions | Année 2013-2014

Feuille 8. Révisions

Extraits des contrôles des années précédentes

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + t$, $t \in \mathbb{R}$, avec la condition initiale $y'(0) = 0$.

Exercice 2. Trouver l'unique fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $y(0) = 1$ et telle que

$$y'(x) - x^2 y(x) = 2e^{x^3/3}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = x^2 \cos(1/x).$$

1. Peut-on prolonger la fonction f par continuité en 0 ?
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

2.a. La fonction g est-elle dérivable en 0 ?

2.b. La fonction g' est-elle continue en 0 ?

Exercice 4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
On définit la fonction $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = 2x + 3x^2 + \cdots nx^{n-1} - 1.$$

En particulier, on a $f_2(x) = 2x - 1$, $f_3(x) = 2x + 3x^2 - 1$ et $f_4(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 - 1$.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, 1]$.
2. Montrer que f_n est une bijection de $[0, 1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$ et montrer que
$$f_n^{-1} : [f_n(0), f_n(1)] \to [0, 1]$$
est dérivable.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel $a_n \in]0, 1[$ tel que $f_n(a_n) = 0$.
4. Calculer a_2 et a_3.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in]0, 1[$, on a :
$$f_{n+1}(x) > f_n(x).$$
6. En déduire que $f_{n+1}(a_n) > 0$ et que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.
7. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente.
8. Notons a la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$. Montrer que $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

   Dans la suite du problème on va calculer la valeur de la limite a. On définit la fonction g_n : $[0, 1[\to \mathbb{R}$ par
$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots x^n.$$
9. Montrer que $g_n(x) = \dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.
10. Montrer que $2 + f_n(x) = g_n'(x)$ et en déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a :
$$f_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n - 2x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2}.$$

11. Sachant que $0 \leq a_n \leq \dfrac{1}{2}$, pour tout $n \geq 2$, calculer
$$\lim_{n\to\infty} n a_n^{n+1}, \quad \lim_{n\to\infty} (n+1) a_n^n \quad \text{et (en fonction de } a) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(a_n).$$
12. Démontrer que a est racine de l'équation $2x^2 - 4x + 1 = 0$.
13. Calculer la valeur de a.

Exercice 5. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ par la récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, et par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$.

1.a. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

1.b. En déduire que si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge alors sa limite est 0.

1.c. En déduire que de deux choses l'une : ou bien $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, ou bien $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

2. On suppose que $-1 \leq u_0 \leq 0$.

2.a. Montrer que, dans ce cas, on a $-1 \leq u_n \leq 0$, $\forall\, n \geq 0$.

2.b. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et calculer sa limite.

3. On suppose $u_0 > 0$. Dans ce cas, montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$. On pourra utiliser par exemple la question 1.

4. Supposons $u_0 < -1$.

4.a. Montrer que $u_1 > 0$.

4.b. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geq 0}$ dans ce cas. On pourra utiliser par exemple la question 3.

Exercice 6. Dans ce qui suit, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.
Soient $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ les suites définies par
$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \quad \text{et } v_n = u_n - \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, n \geq 1.$$
1. Calculer u_1, u_2, v_1, v_2.
2. Pour $n \geq 1$, calculer $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n.
3. Justifier la double inégalité
$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, n \geq 1,$$
d'abord par un calcul direct, puis en utilisant le théorème des accroissements finis.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
5. En déduire que les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite.
6. Que peut-on dire de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$, définie par $w_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$?

Exercice 7.

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $g'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. Mais on ne suppose pas $g'(0) > 0$.

2.a. Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0, \infty[$. On justifiera ce fait en utilisant le théorème des accroissements finis.

2.b. En déduire que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - \sin x$.

3.a. Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$.

3.b. En déduire que f est strictement croissante.

4.a. Déterminer l'image $f(\mathbb{R})$ de f.

4.b. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

5.a. Montrer que f admet une fonction réciproque $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui est continue.

5.b. Quels sont les points où h est dérivable ?

Exercice 8. On se donne une suite $(x_n)_{n\geq k} \subset \mathbb{R}$ et on considère la suite

$$V_n := x_k + x_{k+1} + \cdots + x_n, \ \forall\, n \geq k.$$

On va étudier la convergence de $(V_n)_{n\geq k}$ dans certains cas.

1. Soit q un réel fixé. On pose $x_n = q^n$, $\forall\, n \geq 0$, et on définit comme ci-dessus V_n pour $n \geq 0$. (On utilise la convention $q^0 = 1$, $\forall\, q \in \mathbb{R}$.)

1.a. Donner l'expression de V_0, V_1 et V_2.

1.b. Montrer que $V_n = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ pour tout n et pour $q \neq 1$.

1.c. Combien vaut V_n si $q = 1$?

1.d. Etudier la convergence de V_n. On distinguera les cas suivants : $|q| < 1$, $q = 1$, $q = -1$, $q > 1$, $q < -1$.

2. On étudie maintenant le cas où $x_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$, et donc V_n est défini pour $n \geq 1$.

2.a. Donner l'expression de V_1, V_2, V_3.

2.b. Montrer que $V_{2n} - V_n \geq \dfrac{1}{2}$, $\forall\, n \geq 1$.

2.c. En déduire que (V_n) ne converge pas.

2.d. En étudiant la monotonie de $(V_n)_{n\geq 1}$, montrer que $V_n \to \infty$.

3. Cette fois-ci, on prend $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $\forall\, n \geq 1$.

3.a. Montrer que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

3.b. Montrer par récurrence que $V_n \leq 2 - \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$.

3.c. En déduire que la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ converge.

4. On revient au cas où la suite $(x_n)_{n\geq k}$ est quelconque. On suppose que $(V_n)_{n\geq k}$ converge. Montrer que $x_n \to 0$. (On pourra examiner la différence $V_n - V_{n-1}$, avec $n \geq k+1$.)

Exercice 9. On se propose d'étudier la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \begin{cases} |x|^x = e^{x \ln |x|}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1.a. Etudier la continuité de f.

1.b. Quelles sont les limites de f en $-\infty$ et ∞ ?

2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $x \neq 0$, montrer que

$$f'(x) = (1 + \ln |x|)\, f(x).$$

3.a. Montrer que f atteint un minimum local en un point $a \neq 0$ et un maximum local en un point $b \neq 0$. On précisera les valeurs de a, de b, de $f(a)$ et de $f(b)$.

3.b. Montrer que f est une bijection de $[b, a]$ sur $[f(a), f(b)]$.

4. Donner la solution $y :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ du problème suivant :

$$y'(x) = (1 + \ln x)\, y, \ \forall\, x > 0, \quad \text{avec la condition } y(1) = 2.$$

5.a. Montrer que
$$\lim_{h\to 0+} \frac{e^{h\ln h}-1}{h\ln h} = 1.$$

5.b. En déduire que
$$\lim_{h\to 0+} \frac{e^{h\ln h}-1}{h} = -\infty.$$

5.c. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

6. On note $g : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ la fonction réciproque de $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$. La fonction g est-elle dérivable en $y = 1$? Si oui, combien vaut $g'(1)$?

Exercices de synthèse

Exercice 10. Soit $(x_n) \subset \mathbb{R}$.

1. On suppose qu'il existe un rang n_0 et une constante $k \in]0, 1[$ tels que $|x_{n+1}| \leq k\,|x_n|$, $\forall\, n \geq n_0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Et si $k = 0$?
2. Application : montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
3. Cette fois-ci, on suppose $x_n > 0$, et qu'il existe un rang n_0 et une constante $r > 1$ tels que $x_{n+1} \geq r\, x_n$, $\forall\, n \geq n_0$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.
4. Utiliser les questions 1 et 3 pour montrer le résultat suivant. Soit (x_n) une suite telle que $x_n > 0$ et $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \to \ell$.

4.a. Si $\ell < 1$, montrer que $x_n \to 0$.

4.b. Si $\ell > 1$, montrer que $x_n \to \infty$.

Commentaire. On peut construire des suites (x_n) telles que $\ell = 1$ et (x_n) n'ait pas de limite, ou ait toute limite $L \in [0, \infty]$ donnée à l'avance. Donc si $\ell = 1$, il n'y a pas de conclusion possible.

5. Application : montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^n}{n^a} = \infty$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soient
$$A = \left\{x^2 + y^2 \,;\, x,\, y \in \mathbb{R},\ xy = 1\right\}, \text{ et } B = \left\{xy \,;\, x,\, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

1. Dessiner les courbes $xy = c$ et $x^2 + y^2 = d$ pour plusieurs valeurs des constantes $c, d \in \mathbb{R}$.
2. A partir de ces dessins, deviner les valeurs de $\sup A$, $\inf A$, $\min A$, $\max A$.
3. Prouver les résultats intuités.

Exercice 12. Le but de cet exercice est de montrer que deux solutions d'une même équation différentielle linéaire non homogène sont toujours *ordonnées*, c'est-à-dire que l'une des solutions est toujours au-dessus de l'autre.

1. On se donne deux fonctions $z, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Est-ce vrai que z et w sont forcément ordonnées ?
2. Soient $z, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y' = a(x)y + f(x)$, avec $a, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. Supposons que $z(0) < w(0)$. Montrer que $z(x) < w(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. (On pourra considérer l'équation satisfaite par la fonction $z - w$.)
3. Que se passe-t-il si $z(0) = w(0)$? Et si $z(0) > w(0)$?
4. Conclusion ?

Exercice 13. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Le but de cet exercice est de montrer que de deux choses l'une :

(i) Ou bien $G = a\,\mathbb{Z}$ pour un $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Ou bien G a la propriété suivante :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ il existe une suite } (x_n) \subset G \text{ telle que } x_n \to x. \tag{1}$$

(Dans le deuxième cas, on dit que G est « dense dans $\mathbb{R}$ ».)

Pour prouver ce résultat, posons

$$A := \{x \in G\,;\, x > 0\}.$$

1. Si $A = \emptyset$, montrer que $G = 0\,\mathbb{Z}$.
2. Dans la suite, nous supposons $A \neq \emptyset$. Posons $a := \inf A$. Montrer que $a \in [0, \infty[$.
3. Examinons d'abord le cas où $a = 0$.

3.a. Dans ce cas, montrer qu'il existe une suite $(y_n) \subset A$ telle que $y_n \to 0$.

3.b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $x_n := E\left(\dfrac{x}{y_n}\right) y_n$. Montrer que $(x_n) \subset G$ et que $x_n \to x$. Conclusion ?

4. Examinons maintenant le cas où $a > 0$.

4.a. Montrer qu'il existe $(y_n) \subset A$ telle que $y_n \to a$.

4.b. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $y_n \in [a, 2a[$, $\forall\, n \geq n_0$.

4.c. En déduire que $y_n = a$, $\forall\, n \geq n_0$.

4.d. En déduire que $a \in G$.

4.e. Soit $b \in G$. Posons $c := b - E\left(\dfrac{b}{a}\right) a$. Montrer que $c \in G$ et que $0 \leq c < a$.

4.f. En déduire que $c = 0$. Conclusion ?

5. Conclusion finale ?