UE MAT2094L Analyse 4

Chapitre 5. Différentielle

25 février, 4 et 18 mars 2026

Motivation Cadre : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$

$$f \text{ dérivable en } a \iff \exists f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h} = 0 \iff f(a+h)-f(a)-f'(a)h = o(h)$$

Définition (différentielle) Cadre : $f : U \to F$, U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, F normé

- f est différentiable en $a \iff \exists\, T : \mathbb{R}^n \to F$ linéaire telle que $f(a+h)-f(a)-T(h) = o(h)$ (dans $\mathbb{R}$, $T(h) = f'(a)h$)
- Si T existe, on note $d_a f = T$, $d_a f(h) = T(h)$

Lycée, L1 : dérivée ; **L2** : différentielle dans $\mathbb{R}^n$ (ou un espace normé de dimension finie) ; **L3** : différentielle dans un espace normé

Exercice $*$

Préciser et prouver : f différentiable en $a \implies f$ continue en a

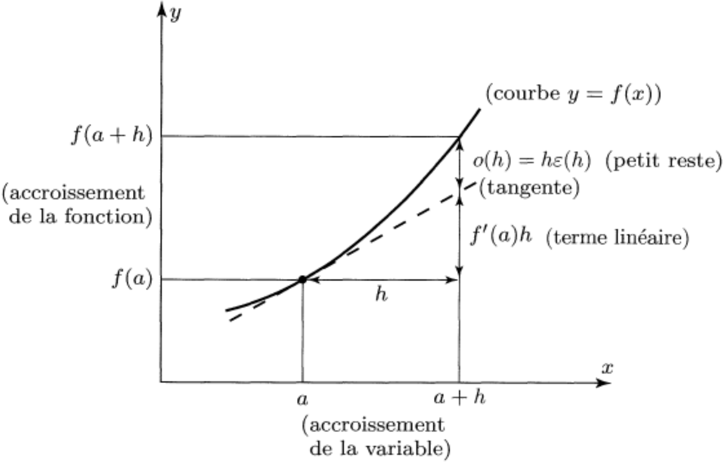

Figure. Le b.a-ba du calcul différentiel :
$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + h\varepsilon(h)$.

Cadre

U ouvert de $\mathbb{R}^n$, F normé, $f : U \to F$, $a \in F$, $j \in \{1, \ldots, n\}$

Définition (dérivée partielle)

Sous réserve d'existence, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a)$
$:=$ la dérivée en a_j de $x_j \mapsto (a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$
(« d f sur d x_j », ou « d j f »)

Exercice $*$

Déterminer

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$, avec $f(x,y) := x^2 y$
- $\partial_3 f(1,0,2)$, avec $f(x_1, x_2, x_3) := |x_1 + x_2 - x_3|$

Proposition (différentielle et dérivées partielles)

Si f est différentiable en a, alors f a des dérivées partielles en a et

$$\partial_j f(a) = d_a f(e_j),\ d_a f(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \partial_j f(a)$$

Corollaires

- La différentielle $d_a f$, si elle existe, est unique
- $d_a(f+g) = d_a f + d_a g$ (préciser l'énoncé)

Théorème (dérivées partielles continues et différentielle)

Si $F = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^m$), f a des dérivées partielles *en tout point de* U, et si les dérivées partielles sont continues en a, alors f est différentiable en a

Définition (fonction de classe C^1)

f est de classe C^1 si et seulement si les dérivées partielles $\partial_j f$ existent et sont continues $(f \in C^1(U;F))$

« Encodage » de la différentielle

But : décrire la différentielle via un vecteur ou une matrice

Exercice $*$

Si $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$, alors f est différentiable si et seulement si f_j est différentiable, $j = 1, \ldots, m$

Définitions (gradient, matrice jacobienne)

- Si $f : U \to F$ est différentiable, $\nabla f := \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}$ (« nabla » f)
- Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable, $Jf := \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \ldots & \partial_n f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m & \partial_2 f_m & \ldots & \partial_n f_m \end{pmatrix}$

  (« matrice jacobienne » de f)

Formules « compactes »

- Si $f : U \to F$ est différentiable, $d_a f(h) = h \nabla f(a)$, $\forall\, a \in U, \forall\, h \in \mathbb{R}^n$
- Ou, en écrivant les points de $\mathbb{R}^n$ à la verticale, $d_a f(h) = h \cdot \nabla f(a)$, $\forall\, a \in U, \forall\, h \in \mathbb{R}^n$
- Si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable, $d_a f(h) = h\, {}^t[Jf(a)]$, $\forall\, a \in U, \forall\, h \in \mathbb{R}^n$
- Ou, en écrivant les points de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^m$ à la verticale, $d_a f(h) = Jf(a)h$, $\forall\, a \in U, \forall\, h \in \mathbb{R}^n$
- Convention la plus utilisée : vecteurs à la verticale dans les formules compactes

Exercice $*$ (formule de Taylor à l'ordre 1)

Préciser les hypothèses et montrer les formules « de Taylor à l'ordre 1 » suivantes

- $f(a+h) = f(a) + h \cdot \nabla f(a) + o(h)$
- $f(a+h) = f(a) + Jf(a)h + o(h)$

La règle de la chaîne au lycée

$f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ dérivables $\implies (g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$

Théorème (règle de la chaîne)

V ouvert de $\mathbb{R}^m$, G espace normé, $f : U \to V$, $g : V \to G$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d_a(g \circ f) = (d_{f(a)}g) \circ (d_a f)$

Exercice $*$

Préciser les énoncés et montrer les propriétés suivantes

- Si $T : \mathbb{R}^n \to F$ linéaire, alors $d_a T(h) = T(h)$
- Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\dfrac{d}{dt} f((1-t)x + ty) = (y - x) \cdot [(\nabla f)((1-t)x + ty)]$
- $d_a(fg) = f(a)d_a g + g(a)d_a f$ (composer le couple (f, g) et $(x, y) \mapsto xy$)
- Proposer une valeur approchée de $(1 + 0{,}0006)(1 - 0{,}0009)$

Proposition (règle de la chaîne pour les dérivées partielles)

V ouvert de $\mathbb{R}^m$, G espace normé, $f : U \to V$, $g : V \to G$,
$f = f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$, $g = g(y_1, \ldots, y_m)$
Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \ \forall j = 1, \ldots, n$$

Corollaire (règle de la chaîne si $n = 1$)

Si $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert, $f : I \to V$, $g : V \to G$, f dérivable en $t \in I$, g différentiable en $f(t)$, alors $g \circ f$ est dérivable en t et

$$(g \circ f)'(t) = f'(t) \cdot [(\nabla g)(f(t)]$$

Exercice $*$

Préciser la question et y répondre : Que devient la règle de la chaîne si $m = 1$?

Exercice $*$

Préciser les questions posées et y répondre

- Dans $\mathbb{R}^n$, calculer $\partial_j\left(e^{\|x\|_2^2}\right)$
- Calculer la dérivée de $t \mapsto f(t,t^2)$
- Calculer les dérivées partielles de $(r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$

Théorème (des accroissements finis)

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable, et $[x;y] \subset U$, alors

- Il existe $z \in [x;y]$ tel que $f(y) - f(x) = (y-x)\cdot\nabla f(z)$ (« TAF »)
- $\left|f(y) - f(x)\right| \leq \sup_{z\in[x;y]} \left\|\nabla f(z)\right\|_2 \|y-x\|_2$ (« IAF »)

Exercice $**$

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable et $d_a f = 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}^n$, alors f est constante

Cadre

$f = f(x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en a

Définition (espace tangent)

L'espace tangent au graphe de f en a est l'espace affine d'équation
$t = f(a) + (x - a) \cdot [\nabla f(a)],\ \ t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$

Interprétation géométrique de l'espace tangent

L'espace tangent est l'espace affine qui « approche le mieux » le graphe de f autour de a

Interprétation du sens du gradient

L'accroissement « infinitésimal » de f autour de a est le plus grand dans le sens du gradient

Gradient et ensemble de niveau

$\nabla f(a)$ est « orthogonal » à l'ensemble de niveau $\{x \in U ; f(x) = f(a)\}$

Cadre

$U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to F$, $a \in U$, $v \in \mathbb{R}^n$ (cadre général : en L3)

Définition (dérivée directionnelle)

Sous réserve d'existence,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \text{la dérivée en } s = 0 \text{ de } s \mapsto f(a+sv)$$

(« la dérivée de f en a dans la direction v »)

Proposition (différentielle et dérivée directionnelle)

Si f est différentiable en a, alors f a des dérivées directionnelles et

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = d_a f(v) = v \cdot [\nabla f(a)], \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n$$

Cas particulier : $\dfrac{\partial f}{\partial e_j}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \partial_j f(a), \ \forall\, j = 1, \ldots, n$