

# UE MAT2094L Analyse 4

## Chapitre 3. Fonctions continues

4 et 11 février 2026

## Cadre

- $(E, \| \cdot \|_E)$ ,  $(F, \| \cdot \|_F)$  espaces normés (mais voir la remarque suivante)
- $A \subset E$ ,  $B \subset F$ ,  $a \in A$
- $f : A \rightarrow B$

## Définition (fonction continue)

- $f$  est « continue en  $a$  » si et seulement si  $[(x^k) \subset A, x^k \rightarrow a] \implies [f(x^k) \rightarrow f(a)]$
- $f$  est « continue » si et seulement si  $f$  continue en tout  $a \in A$

## Remarques

- La définition de la continuité est « métrique »
- Si  $F = \mathbb{R}$ , par défaut la norme est  $| \cdot |$
- $f$  est continue si et seulement si

$$[(x^k) \subset A, a \in A, x^k \rightarrow a] \implies [f(x^k) \rightarrow f(a)]$$

### Exercice \*

Préciser et prouver l'énoncé suivant : Si on remplace les normes par des normes équivalentes, les fonctions continues restent les mêmes

### Exercice \*\*

- Dans  $\mathbb{R}$ , montrer que la définition de la continuité est celle du L1
- Énoncer et montrer la caractérisation de la continuité « avec  $\varepsilon$  et  $\delta$  »

### Exercice \* (exemple fondamental)

Dans  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme, les « monômes » (applications de la forme  $x \mapsto C(x_1)^{\alpha_1}(x_2)^{\alpha_2} \dots (x_n)^{\alpha_n}$ , avec  $C \in \mathbb{R}$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$  constantes) sont continus

### Exercice \*

- L'application  $\| \cdot \|_E : E \rightarrow \mathbb{R}$  est continue
- Pour toute norme  $\| \cdot \|$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto \|x\|$  est continue sur  $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1)$

## Exercice \*

Préciser et prouver les propriétés suivantes

- Si  $f, g$  sont continues et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $f + \lambda g$  est continue
- Un produit de fonctions continues est une fonction continue
- Une composée de fonctions continues est une fonction continue

## Proposition (caractérisation des fonctions continues)

- $f : E \rightarrow F$  est continue si et seulement si  $f^{-1}(U)$  est ouvert,  $\forall U \subset F$  ouvert
- $f : E \rightarrow F$  est continue si et seulement si  $f^{-1}(G)$  est fermé,  $\forall G \subset F$  fermé

## Remarque

Il existe des caractérisations analogues de la continuité pour  $f : A \rightarrow B$ , qui reposent sur la notion d'ouvert ou fermé de  $A$  ou  $B$  (ce sera vu en L3)

### Exercice \*

Préciser et montrer le résultat suivant : si  $f : A \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , alors  $f$  est continue si et seulement si  $f_j$  est continue,  $j = 1, \dots, n$

### Définition (fonction lipschitzienne)

$f : A \rightarrow B$  est « lipschitzienne » si et seulement si il existe une constante  $L$  telle que

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq L\|x - y\|_E, \quad \forall x, y \in A$$

(On peut préciser :  $f$  est «  $L$ -lipschitzienne ») De même dans des espaces métriques

### Exercice \*\*

Une fonction lipschitzienne est continue

## Théorème des bornes atteintes (de Weierstrass)

Une fonction continue  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $K$  compact, atteint son maximum et son minimum : il existe  $\underline{x}, \bar{x} \in K$  tels que  $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\bar{x})$ ,  $\forall x \in K$

### Exercice \*

Dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ ,  $S(0,1)$  est compacte

## Théorème (équivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$ )

Deux normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes

## Théorème de Bolzano-Weierstrass

Une suite bornée dans  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme contient une sous-suite convergente

## Théorème de Heine-Borel (caractérisation des compacts dans $\mathbb{R}^n$ )

Dans  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme, un ensemble est compact si et seulement si il est fermé et borné

## Exercice \*\*

Si  $f : A \rightarrow B$  est continue et  $K \subset A$  est compact, alors  $f(K)$  est compact

## Exercice \*\*

Préciser et montrer le résultat suivant : Si  $x, y \in E$ , alors  $\mathbb{R} \ni t \mapsto (1-t)x + ty$  est continue

## Exercice \*\*

Préciser et montrer le résultat suivant : Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow F$  est continue et si  $m < n$ , alors  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow F$ ,  $g(x_1, \dots, x_m) := f(x_1, \dots, x_m, 0, 0, \dots, 0)$  est continue

## Exercice \*\*

Préciser et montrer le résultat suivant : Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  est continue, alors  $\frac{1}{f} : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  est continue  
(Plus difficile) De même si  $f : A \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$