Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Cours $\#6$ & 7
– le 28 mars 2022 –

Deuxième partie. Calcul différentiel

Le cadre est le suivant :

(i) $(E, \| \ \|)$ est un espace normé *de dimension finie sur* $\mathbb{R}$.
Cas particulier important : $E = \mathbb{R}^n$.

(ii) U est un ouvert de E.

(iii) $(G, \| \ \|_G)$ est un espace normé sur $\mathbb{R}$.
Cas particulier important : $(G, \| \ \|_G) = (\mathbb{R}, | \ |)$.

(iv) $f : U \to G$.

(v) Si $a, b \in E$, alors

$$[a, b] := \{(1-t)a + tb\,;\ t \in [0, 1]\}.$$

Chapitre $\#1$. Différentielle

7. Équivalence entre différentiabilité et dérivabilité si $n = 1$.
8. Lien entre différentielle, dérivées partielles et dérivées directionnelles. $d_a f(h) = [\nabla f(a)] \cdot h$.
9. Si les dérivées partielles d'une fonction sont continues, alors la fonction est différentiable.
10. Fonction de classe C^1.
11. Exercice. Calculer la différentielle de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := xy$, $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
12. f différentiable (en a) implique f continue (en a).
13. Règle de la chaîne pour les différentielles :

Proposition 1. Nous supposons G de dimension finie. Soit V un ouvert de G. Soit $(H, \| \|_H)$ un espace normé sur $\mathbb{R}$. Soient $f : U \to G$ telle que $f(U) \subset V$ et $g : V \to H$. Si f est différentiable (en $a \in U$) et g est différentiable (en $b := f(a)$), alors $g \circ f$ est différentiable (en $a \in U$) et

$$d_a(g \circ f)(h) = d_{f(a)}g[d_a f(h)], \forall\, h \in E, \tag{1}$$

ou encore

$$d_a(g \circ f) = [d_{f(a)}g] \circ [d_a f]. \tag{2}$$

Démonstration. Soit $r > 0$ tel que $B(f(a), r) \subset V$. f étant continue en a, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$[x \in U,\ \|x - a\| < \delta] \implies \|f(x) - f(a)\|_G < r.$$

Par ailleurs, il existe $R > 0$ tel que $B(a, R) \subset U$. Soit $\rho := \min\{\delta, R\}$. Nous avons alors

$$\|h\| < \rho \implies a + h \in B(a, \rho) \implies [a + h \in U,\ f(a + h) \in B(f(a), r)].$$

Nous avons

$$f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + \varepsilon_1(h),\ \|h\| < \rho,$$
$$g(f(a) + k) = g(f(a)) + d_{f(a)}g(k) + \varepsilon_2(k),\ \|k\|_F < r$$

avec $\varepsilon_1(h) = o(\|h\|)$ quand $h \to 0$ et $\varepsilon_2(k) = o(\|k\|_F)$ quand $k \to 0$.

Si $\|h\| < \rho$, alors (les o étant entendus quand leurs arguments tendent vers 0)

$$\begin{aligned}
g(f(a + h)) =& g(f(a) + d_a f(h) + \varepsilon_1(h)) \\
=& g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h) + \varepsilon_1(h)) + \varepsilon_2(d_a f(h) + \varepsilon_1(h)) \\
=& g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h)) + d_{f(a)}g(\varepsilon_1(h)) \\
& + o(d_a f(h) + \varepsilon_1(h)) \\
=& g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h)) + O(\varepsilon_1(h)) \\
& + o(O(\|h\|) + o(\|h\|)) \\
=& g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h)) + O(o(\|h\|)) + o(O(\|h\|)) \\
=& g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h)) + o(\|h\|) + o(\|h\|) \\
=& g(f(a)) + d_{f(a)}g(d_a f(h)) + o(\|h\|) \\
=& g(f(a)) + [d_{f(a)}g] \circ [d_a f](h) + o(\|h\|).
\end{aligned}$$

L'application $[d_{f(a)}g] \circ [d_a f]$ étant linéaire, nous obtenons (1). $\square$

14. Règle de la chaîne pour les dérivées partielles :

Proposition 2. Dans ce qui précède, nous supposons $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$. Si $f = (f_1, \ldots, f_m)$ est différentiable (en $a \in U$) et g est différentiable (en $b := f(a)$), alors

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a))\, \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a),\ \forall\, i \in [\![1, n]\!]. \tag{3}$$

Démonstration. Nous avons, avec $\{e_i\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\{e'_j\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) &= d_a(g \circ f)(e_i) = d_{f(a)}g\,(d_a f(e_i)) = d_{f(a)}g\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)\\ &= d_{f(a)}g\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)\, e'_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a))\, \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a).\end{aligned}.$$

□

15. Exercice. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable, avec $U \subset \mathbb{R}^n$. Soient $a, b \in U$ tels que le segment $[a, b]$ soit dans U. Calculer $\dfrac{d}{dt} f((1-t)a + tb)$, $t \in [0, 1]$.
16. Exercice de cours. Soient $f_1, f_2 :]0, 1[\to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Soit $f :]0, 1[^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in]0, 1[.$$

    Montrer que f est différentiable et calculer $d_a f$, $\forall\, a \in]0, 1[^2$.
17. Fonctions plusieurs fois différentiables. Pour simplifier, nous nous plaçons dans $E = \mathbb{R}^n$ (pour le cas général, voir le dernier item).
    (a) Une fonction est deux fois différentiable si elle est différentiable et si ses dérivées partielles du premier ordre, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, sont différentiables.
    (b) En particulier, si f est deux fois différentiable, alors les dérivées partielles du second ordre $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)$ existent, $\forall\, i, j \in [\![1, n]\!]$. Elles sont notées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, ou $\partial_j \partial_i f$, ou encore $\partial^2_{ji} f$.

(c) Une fonction est trois fois différentiable si elle est une fois différentiable et si des dérivées partielles sont deux fois différentiables. Les dérivées partielles du troisième ordre, qui existent, sont notées $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$. Etc.

(d) Une fonction est de classe C^k, $k = 1, 2, , \ldots$, si f admet des dérivées partielles jusqu'à l'ordre k et si ses dérivées partielles sont continues.

(e) Le cas d'un espace quelconque E, normé de dimension n, ne sera pas traité, mais voici comment procéder. Nous fixons une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E et nous définissons

$$\widetilde{U} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, x_1 e_1 + \cdots x_n e_n \in U\}$$
$$\widetilde{f}(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1 e_1 + \cdots x_n e_n) \in G, \, \forall\, (x_1, \ldots, x_n) \in \widetilde{U}.$$

Alors, par définition, f est deux fois différentiable (etc.) si et seulement si $\widetilde{f}$. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et nous choisissons la base canonique, nous retrouvons les définitions d'avant. Dans le cas général, une observation importante qui rend ses définitions pertinentes est que les définitions *ne dépendent pas du choix de la base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

18. Petit exercice. Si f est trois fois différentiable, montrer que les dérivées partielles du second ordre de f sont différentiables.
19. Exercice de cours. Si f est de classe C^k (avec $k \geq 1$), montrer que f est k fois différentiable.
20. **Théorème de Young**. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction deux fois différentiable. Alors

$$\partial_j \partial_i f(a) = \partial_i \partial_j f(a), \, \forall\, a \in U, \, \forall\, i, j \in [\![1, n]\!].$$

Démonstration du théorème de Young. Pour simplicité, nous supposons $n = 2$ et $m = 1$, et donc $f : U \to \mathbb{R}$, avec $U \subset \mathbb{R}^2$. Posons $a = (x, y)$.

Soit $r > 0$ tel que

$$\|(h, k)\|_\infty < r \implies (x + h, y + k) \in U.$$

[Pourquoi un tel r existe-t-il ?]

Pour $0 < h < r$, le carré de sommets (x, y), $(x+h, y)$, $(x, y+h)$, $(x+h, y+h)$ est contenu dans U. [Pourquoi ?]

Pour un tel h, posons

$$F(h) := f(x+h, y+h) - f(x+h, y) - f(x, y+h) + f(x, y).$$

L'idée de la preuve est de partir de l'identité

$$F(h) = G(x+h) - G(x), \text{ avec } G(s) := f(s, y+h) - f(s, y), \ 0 \leq s < r,$$

et d'aboutir à

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(h)}{h^2} = \partial_y \partial_x f(x, y). \tag{4}$$

Par un argument similaire basé sur l'identité

$$F(h) = H(x+h) - H(x), \text{ avec } H(t) := f(x+h, t) - f(x, t), \ 0 \leq t < r,$$

nous obtenons

$$\lim_{h\to 0+} \frac{F(h)}{h^2} = \partial_x \partial_y f(x, y). \tag{5}$$

Le théorème de Young suit alors de (4), (5) et de l'unicité de la limite.

Il reste à montrer (4). Clairement, G est dérivable sur son domaine de définition, et

$$G'(s) = \partial_x f(s, y+h) - \partial_x f(s, y), \ 0 \leq s < r.$$

Le théorème de accroissements finis donne l'existence d'un $c = c(x, y, h)$ compris entre x et $x+h$ tel que

$$F(h) = hG'(c) = h[\partial_x f(c, y+h) - \partial_x f(c, y)]. \tag{6}$$

∂_x étant différentiable (justifier), nous obtenons de (6) (justifier chaque étape)

$$\begin{aligned} F(h) &= h[\partial_x f(x,y) + (c-x)\partial_x\partial_x f(x,y) + h\partial_y\partial_x f(x,y) + o((c-x,h)) \\ &\qquad - \partial_x f(x,y) - (c-x)\partial_x\partial_x f(x,y) - o((c-x,0))] \\ &= h^2\partial_y\partial_x f(x,y) + h[o((c-x,h)) - o(c-x,0))] \\ &= h^2\partial_y\partial_x f(x,y) + h[o(O(h)) + o(O(h))] \\ &= h^2\partial_y\partial_x f(x,y) + h\,o(O(h)) \\ &= h^2\partial_y\partial_x f(x,y) + h\,o(h) \\ &= h^2\partial_y\partial_x f(x,y) + o(h^2). \end{aligned}$$

Nous obtenons (4) à partir de ce qui précède (justifier). $\square$

21. Corollaire : **Théorème de Schwarz**. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^2. Alors

$$\partial_j \partial_i f(a) = \partial_i \partial_j f(a), \ \forall\, a \in U, \ \forall\, i, j \in [\![1, n]\!].$$

22. Théorème de Fermat. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $a \in U$ un point d'extrémum local de f. Alors $d_a f = 0$.
23. Corollaire. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$. Soit Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $a \in U$ un point d'extrémum local de f. Alors $\nabla f(a) = 0$.

Rappels. Formules de Taylor avec point intermédiaire et sous forme intégrale pour $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$

1. Si g est dérivable, alors il existe $t \in]0, 1[$ tel que $g(1) = g(0) + g'(t)$.
2. Si g est de classe C^1, alors $g(1) = g(0) + \displaystyle\int_0^1 g'(t)\, dt$.
3. Si g est deux fois dérivable, alors il existe $t \in]0, 1[$ (pas forcément celui de l'item 1!) tel que $g(1) = g(0) + g'(0) + \dfrac{1}{2} g''(t)$.
4. Si g est de classe C^2, alors $g(1) = g(0) + g'(0) + \displaystyle\int_0^1 (1 - t)\, g''(t)\, dt$.

Les formules de Taylor

1. Nous établirons trois types de formules de Taylor :
   (a) Avec reste en o (hypothèse : f différentiable k fois, $k = 1, 2$).
   (b) Avec point intermédiaire (hypothèses : f différentiable k fois, $k = 1, 2$, et $[a, b] \subset U$).
   (c) Avec reste intégral (hypothèses : f de classe C^k, $k = 1, 2$, et $[a, b] \subset U$).
2. Petit exercice. Soit $f : U \to G$ une fonction différentiable (en $a \in U$). Alors nous avons la formule de Taylor au premier ordre avec reste en o

$$f(a + h) = f(a) + d_a f(h) + o(h) \text{ quand } h \to 0.$$

3. Petit exercice. Proposer et montrer la formule de Taylor au premier ordre avec reste en o si $U \subset E$, avec E espace normé quelconque de dimension finie.

4. Formule de Taylor au premier ordre avec point intermédiaire. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Si $a, b \in U$ sont tels que $[a, b] \subset U$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + [\nabla f(c)] \cdot (b - a).$$

5. Exercice de cours. Proposer et montrer la formule de Taylor au premier ordre avec point intermédiaire si $U \subset E$, avec E espace normé quelconque de dimension finie.
6. Formule de Taylor au premier ordre avec reste intégral. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $a, b \in U$ sont tels que $[a, b] \subset U$, alors

$$f(b) = f(a) + \int_0^1 [\nabla f((1-t)a + tb)] \cdot (b - a)\, dt.$$

7. Exercice de cours. Soit E un espace normé de dimension finie (par nécessairement $\mathbb{R}^n$). Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$.
   (a) Montrer que f est différentiable (en $a \in U$) si et seulement si f_j est différentiable (en $a \in U$), $j = 1 \dots, m$.
   (b) Si f est différentiable (en $a \in U$) et $\{e_1, \dots, e_m\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^m$, montrer que

$$d_a f = \sum_{j=1}^{m} d_a f_j\, e_j.$$

   (c) Si $E = \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $a \in U$, montrer que la matrice de $d_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ est

$$J_a f = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t[\nabla f_1(a)] \\ {}^t[\nabla f_2(a)] \\ \vdots \\ {}^t[\nabla f_m(a)] \end{pmatrix}.$$

   Cette matrice est la *(matrice) jacobienne* de f.
   Si $m = 1$, alors $J_a f = {}^t[\nabla f(a)]$.

8. Exercice de cours. (Admettre, si nécessaire, l'exercice de cours # 10.) Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1. Si $a, b \in U$ sont tels que $[a, b] \subset U$, alors

$$f(b) = f(a) + \int_0^1 d_{(1-t)a+tb}f\,(b-a)\,dt.$$

9. Définition. Si $f : U \to \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles du second ordre en $a \in U$, alors *la matrice hessienne* $H_a f \in M_n(\mathbb{R})$ est

$$H_a f := \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(a) & \partial_1\partial_2 f(a) & \dots & \partial_1\partial_n f(a) \\ \partial_2\partial_1 f(a) & \partial_2\partial_2 f(a) & \dots & \partial_2\partial_n f(a) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial_n\partial_1 f(a) & \partial_n\partial_2 f(a) & \dots & \partial_n\partial_n f(a) \end{pmatrix}.$$

Nous utiliserons la même notation si $f : U \to G$. Dans ce cas, nous avons $H_a f \in M_n(G)$.

10. Formule de Taylor à l'ordre deux avec point intermédiaire. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est deux fois différentiable, et si $[a, b] \subset U$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + [\nabla f(a)] \cdot (b-a) + \frac{1}{2}[H_c f(b-a)] \cdot (b-a).$$

11. Formule de Taylor à l'ordre deux avec reste intégral. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, et si $[a, b] \subset U$, alors

$$\begin{aligned} f(b) =& f(a) + d_a f\,(b-a) \\ &+ \int_0^1 (1-t)\,[H_{(1-t)a+tb} f\,(b-a)] \cdot (b-a)\,dt. \end{aligned}$$

12. Exercice de cours. Montrer que la formule précédente reste vraie si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^2 et $[a, b] \subset U$.

13. Formule de Taylor à l'ordre deux avec reste en o. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable sur U et deux fois différentiable en $a \in U$, alors

$$f(a+h) = f(a) + d_a f\,(h) + \frac{1}{2}[H_a f(h)] \cdot h + o(\|h\|^2) \quad \text{quand } h \to 0.$$

Applications. Points critiques et leur nature

1. Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. $a \in U$ est un point critique de f si $d_a f = 0$.
2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Soit $a \in U$ un point critique de f. Alors $H_a f$ est symétrique, et de plus :
   (a) Si $H_a f > 0$, alors a est un point de minimum local strict.
   (b) Si $H_a f < 0$, alors a est un point de maximum local strict.
   (c) Si $H_a f$ a (au moins) une valeur propre > 0 et (au moins) une valeur propre < 0, alors a n'est pas un extrémum local.