Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Année 2018-2019

Auto-contrôle
–le 10 décembre 2018, durée 75 minutes–

Consignes. a) Préciser la nature des intégrales qui interviennent dans les calculs.
b) Justifier l'utilisation des résultats théoriques (continuité des intégrales à paramètre, théorème de Tonelli, changements de variables, etc.) et préciser à quel type d'intégrale s'applique le résultat utilisé.

Exercice 1 (5 p.). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \\ -1, & \text{si } -\pi < x < 0 \end{cases}$. À partir du développement en série de Fourier de f, calculer la *valeur numérique* de $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 (8 p.). Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < y < x\}$. À l'aide du changement de variables $\begin{cases} u = x + y \\ v = xy \end{cases}$, *que l'on justifiera*, calculer la *valeur numérique* de l'intégrale

$$\int_\Omega e^{-(x+y)} \frac{x-y}{\sqrt{xy}}\, dx dy.$$

Définitions, formules et résultats utiles pour l'exercice 3. Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_1$ et de la mesure de Lebesgue λ_1.

a) $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\xi} f(x)\, dx$, $\forall f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

b) $\widehat{e^{-x^2}}(\xi) = \sqrt{\pi}\, e^{-(\xi^2)/4}$, $\forall \xi \in \mathbb{R}$.

c) *Formule d'inversion de Fourier.* Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ est continue et si $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{\imath x\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

d) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Aux points $x \in \mathbb{R}$ ou cela a un sens,

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y)\, dy.$$

e) Si $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, alors $f * g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ et $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

f) Deux exposants p et q sont conjugués si $1 \leq p, q \leq \infty$ et $1/p + 1/q = 1$.

g) Si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$, avec p et q conjugués, alors $f * g$ est continu, défini en tout point et $|f * g(x)| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

h) *Inégalité de Young.* Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que $1 + 1/r = 1/p + 1/q$. Si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R})$, alors $f * g \in \mathscr{L}^r(\mathbb{R})$ et $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Exercice 3. Partie I (12 p.). On pose, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\Phi^t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x^2)/(4t)}$.

1. Montrer que $\Phi^t \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $\forall t > 0$.

2. Calculer $\widehat{\Phi^t}$, $t > 0$.
3. Montrer, à partir de la formule précédente, que $\widehat{\Phi^s}\,\widehat{\Phi^t} = \widehat{\Phi^{s+t}}$, $\forall\, s,t > 0$.
4. Montrer que $\Phi^s * \Phi^t$ est continue, $\forall\, s,t > 0$.
5. En utilisant les deux questions précédentes et la formule d'inversion de Fourier, montrer que $\Phi^s * \Phi^t = \Phi^{s+t}$, $\forall\, s,t > 0$.
6. Pour $1 \le p \le \infty$ et $t > 0$, montrer que $\Phi^t \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et calculer $\|\Phi^t\|_{L^p}$.

Partie II (4 p.) On pose, pour $t > 0$, $1 \le p \le \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, $S(t)f = f * \Phi^t$. Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et $s,t > 0$.

7. Montrer que $S(t)f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$.
8. Montrer que $S(t)f \in C(\mathbb{R})$.
9. Ésquisser une preuve de l'égalité (vraie) $S(s)S(t)f = S(s+t)f$. De quelle propriété du produit de convolution aurions-nous besoin pour une preuve rigoureuse de cette égalité ?

Partie III (5 p.). Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Soit $u(x,t) = S(t)f(x) = f * \Phi^t(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, t > 0$.

10. Montrer que $u \in C(\mathbb{R}\times]0,\infty[)$.
11. Proposer, *sans justifier leur validité*, des formules pour $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.
12. Si les formules de la question précédente sont vraies, montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, t > 0.$$