Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3e année
Année 2018-2019

Devoir surveillé #1
–le 9 octobre 2018–
–durée 45 minutes–
Sujet #3

Question de cours (3 p.). Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables, $f_n : X \to \mathbb{R}$. Montrer que $\sup\limits_{n\geq 0} f_n$ est mesurable.

Exercice 1 (2 p.). Soient A, B, C, D des parties de l'ensemble X. Si $A \subset C$ et $B \subset D$, montrer que $A \cup B \subset C \cup D$.

Exercice 2 (4 p.). Prouver ou réfuter les affirmations suivantes.
a) Un borélien est un ouvert ou un fermé.
b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors f est borélienne.

Exercice 3 (4 p.). Calculer $\limsup_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n+(-1)^n}$.

Exercice 4 (9 p.). Nous travaillons dans $\mathbb{R}$, avec la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ et la mesure de Lebesgue ν_1.
a) Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors nous notons $\widetilde{I}$ l'union des deux intervalles obtenus en enlevant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I. Exemple : si $I = [-3, 3]$ (de centre 0), alors l'intervalle ouvert qui est enlevé est $]-1, 1[$, et donc $\widetilde{I} = [-3, -1] \cup [1, 3]$.
De manière équivalente, si $I = [a, b]$ alors $\widetilde{I} = [a, a + (b-a)/3] \sqcup [a + 2(b-a)/3, b]$.
(i) Dessiner $\widetilde{I}$ si $I = [0, 1]$ et si $I = [0, 1/3]$.
(ii) Montrer que $\widetilde{I}$ est un borélien, et calculer $\nu_1(\widetilde{I})$ en fonction de $\nu_1(I)$.
b) Nous construisons par récurrence une suite $(C_j)_{j\geq 0}$ décroissante d'ensembles de la manière suivante :
1. $C_0 = [0, 1]$.
2. Si C_j s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés d. d. d. : $C_j = \sqcup_{\ell=1}^m I_\ell$, alors C_{j+1} est défini comme $C_{j+1} = \sqcup_{\ell=1}^m \widetilde{I}_\ell$.
(i) Dessiner C_0, C_1, C_2.
(ii) Montrer que C_j est un borélien, $\forall\, j$.
(iii) Calculer $\nu_1(C_j)$, $j = 0, 1, 2$.
(iv) Proposer et montrer une formule pour $\nu_1(C_j)$.
(v) Posons $C = \cap_{j\geq 0} C_j$. Calculer $\nu_1(C)$.