Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse — Année 2018-2019

Complément #4
Fonctions convexes

Notations, cadre

a) Pour simplifier la compréhension, nous considérons uniquement des fonctions définies sur un ouvert *convexe* de $\mathbb{R}^N$. U est un ouvert *convexe* de $\mathbb{R}^N$, et $f : U \to \mathbb{R}$.

b) a, b sont des points de U, et $[a,b]$ désigne le segment (fermé) entre a et b.

c) $\partial_j f(a)$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à x_j au point $a \in U$. $\partial_i \partial_j f(a)$ est la dérivée par rapport à x_i de $\partial_j f$, calculée en a.

d) $\| \|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^N$. Les « petits o » sont pour $h \to 0$.

e) Plus généralement, nous aurions pu considérer des fonctions f définies sur un ouvert *convexe* d'un espace normé E de dimension finie N. Dans ce cadre, nous fixons une base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de E et nous pouvons retrouver les propriétés et formules correspondant à f à partir des propriétés et formules correspondant à $F(x_1, \ldots, x_N) := f(x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N)$.

Réduction au cas de la dimension 1. Pour chaque $a, b \in U$, soit $g = g_{a,b} : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a + t(b-a))$. Alors

$$[f \text{ est convexe}] \iff [g \text{ est convexe}, \forall\, a, b \in U].$$

Caractérisation de la convexité via les dérivées premières

Hypothèse. f différentiable dans U.
Conclusion.

$$[f \text{ est convexe}] \iff [\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0, \forall\, x, y \in U].$$

Caractérisation de la convexité via les dérivées secondes

Hypothèse. f deux fois différentiable dans U (c'est-à-dire, les dérivées partielles du premier ordre sont différentiables).
Conclusion.

$$[f \text{ est convexe}] \iff [\text{la matrice hessienne de } f \text{ en } x \text{ est positive}, \forall\, x \in U].$$

Explication de texte. La matrice hessienne de f en x est $A = (\partial_i \partial_j f(x))_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,n}$. Cette matrice est symétrique (théorème de Young), donc ses valeurs propres sont réelles. La positivité de la matrice hessienne revient à la positivité (large, et non pas stricte) des valeurs propres.

Points critiques d'une fonction convexe

Hypothèses. f convexe et différentiable dans U.
Conclusion.

$$[x_0 \text{ est point critique de } f] \iff [\nabla f(x_0) = 0].$$