Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3^{e} année
Année 2018-2019

Contrôle terminal
– le 11 janvier 2019 –
– durée 180 minutes –

Consignes pour les questions « standard » « vrai ou faux ». Répondre par « vrai » ou « faux ». Il n'est pas demandé de justifier la réponse. Réponse correcte = 1 p. Réponse fausse = -0,5 p. Non réponse = 0 p. Pour les questions « difficiles », les points sont doublés.

Vrai ou faux (standard) #1 **(1 p. – -0,5 p. – 0 p.).** Soit $(X,\mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $A\subset X$. Alors $\chi_A : X\to\mathbb{R}$ (la fonction caractéristique de A) est mesurable.
Vrai ou faux (standard) #2 **(1 p. – -0,5 p. – 0 p.).** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si f est borélienne, alors f est continue.
Vrai ou faux (standard) #3 **(1 p. – -0,5 p. – 0 p.).** Soit $(X,\mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $f:X\to\mathbb{R}$ mesurable. Alors $f^{-1}([0,1]\setminus\mathbb{Q})\in\mathscr{T}$.
Vrai ou faux (standard) #4 **(1 p. – -0,5 p. – 0 p.).** Soit $(X,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré. Soit $f:X\to[0,\infty[$ une fonction mesurable telle que $\displaystyle\int_X f\,d\mu=0$. Alors $f=0$ μ-p. p.
Vrai ou faux (standard) #5 **(1 p. – -0,5 p. – 0 p.).** Nous avons $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}}=\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$.
Vrai ou faux (difficile) #6 **(2 p. – -1 p. – 0 p.).** Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ avec la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. Il existe une fonction $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ soit donnée par $\widehat{f}(\xi)=\sin\xi$, $\forall\,\xi\in\mathbb{R}$.
Vrai ou faux (difficile) #7 **(2 p. – -1 p. – 0 p.).** Nous travaillons dans $]0,2\pi[$ avec la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. Il existe une fonction $f\in\mathscr{L}^2(]0,2\pi[)$ telle que ses coefficients de Fourier $c_n(f)$ soient donnés par $c_n(f)=\dfrac{\sin(n)}{|n|+1}$, $\forall\,n\in\mathbb{Z}$.

Consignes pour les exercices. a) Justifier, si nécessaire, la mesurabilité des fonctions considérées.
b) Préciser la nature (de Lebesgue, généralisée...) des intégrales qui interviennent dans les énoncés et les calculs.
c) Justifier l'utilisation des résultats théoriques (continuité des intégrales à paramètre, théorème de Fubini, etc.) et préciser à quel type d'intégrale s'applique le résultat utilisé.

Deux formules utiles. a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.
b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$.

Exercice #1 **(3 p.)** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique donnée par $f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } 0\leq x\leq\pi\\ -1, & \text{si } -\pi<x<0\end{cases}$.
a) Calculer les coefficients de Fourier de f.
b) Écrire, à l'aide de ces coefficients, la conclusion du théorème de Dirichlet appliqué à f.
c) Écrire, à l'aide de ces coefficients, la conclusion de l'identité de Parseval appliquée à f.

Exercice #2 **(3 p.+1 p.)** Soit $E(x)$ la partie entière de x, avec $x\in\mathbb{R}$.† Soit $f:[1,\infty[\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{E(x)}{x^3}$.
a) Écrire f comme une « fonction définie par une accolade ».

†. Donc $E(x)$ est le seul entier relatif $m\in\mathbb{Z}$ tel que $m\leq x<m+1$.

b) Justifier l'existence de l'intégrale de Lebesgue $I = \int_{[1,\infty[} f(x)\,dx$.
c) Écrire I comme la somme d'une *série numérique*. (La réponse attendue ne doit pas contenir le signe $\int$.)
d) (*Question bonus*) Donner la valeur de I.

Exercice #3 (3 p.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que pour tout $x \in [0,n]$ nous avons $e^x \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq 1$.
b) Déterminer, en justifiant la conclusion, la valeur de la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n [\cos(x/n) - \sin(2x/n)]\,dx.$$

Exercice #4 (3 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue. Soient f, g deux fonctions boréliennes telles que $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$. À l'aide du théorème de Fubini, dont on justifiera l'utilisation, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)\,dx.$$

Exercice #5 (3 p.) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace probabilisé.† Soit $f : X \to [0,\infty[$ une fonction mesurable.
a) Déterminer, en justifiant la conclusion, la valeur de la limite $I = \lim_{n\to\infty} \int_X f^n\,d\mu$. (Indication : on pourra, par exemple, considérer les ensembles $\{x \in X\,;\, f(x) \leq 1\}$ et $\{x \in X\,;\, f(x) > 1\}$.)
b) Peut-on avoir $I = 2$? Justifier.
c) Si $I = 1$, montrer que $f = 1$ μ-p. p.

Exercice #6 (7,5 p.) Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < x < y\}$. Soit

$$I = \int_\Omega \left(\frac{x}{y}\right) e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

a) Calculer I en utilisant les coordonnées polaires. Justifier le changement de variables.
b) À l'aide du théorème de Tonelli, dont on justifiera l'utilisation, exprimer I comme l'intégrale d'une fonction $y \mapsto g(y)$, fonction g dont on donnera la formule explicite.
c) En utilisant les points précédents et une intégration par parties qui sera justifiée, trouver la valeur de l'intégrale généralisée

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-e^{-y^2})^2}{y^3}\,dy.$$

Exercice 7 (7,5 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue.
On pose, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\Phi^t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x^2)/(4t)}$.
a) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $t > 0$, montrer que $\Phi^t \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ et calculer $\|\Phi^t\|_{L^p}$.
Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Soit $u(x,t) = f * \Phi^t(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, t > 0$.
b) Montrer que $u(\cdot, t)$ est continue et bornée, $\forall\, t > 0$.‡
c) Montrer que $u(\cdot,t) \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $\forall\, t > 0$.
d) Proposer, *sans justifier leur validité mais en expliquant votre raisonnement*, des formules *plausibles* pour $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.
e) Si les formules de la question précédente sont vraies, montrer que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t),\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, t > 0.$$

---

†. Donc μ est une mesure sur $\mathscr{T}$ et $\mu(X) = 1$.
‡. Rappelons que $u(\cdot,t)$ est une notation pour la fonction partielle $\mathbb{R} \ni x \mapsto u(x,t)$.