Analyse complexe
L3 Mathématiques générales et applications 2015–2016
Plan des cours

8 Cours du 6 avril 2016

5 Résidus et indices

11. Théorème de Jordan*. Indice par rapport à une courbe simple fermée*. [1]
12. Calcul de l'indice « à l'intérieur » d'une courbe à géométrie simple.
13. Règle de calcul du résidu si a est un pôle d'ordre m : $\operatorname{Res}(f,a) = \dfrac{1}{(m-1)!}[(z-a)^m f(z)]^{(m-1)}(a)$.
14. Règle du calcul de $\operatorname{Res}(f,a)$ si $f = g/h$ et a est un zéro simple de h.

6 Homotopie

1. Homotopie des lacets dans U : $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$. Ouverts simplement connexes.
2. Lemme technique : on peut remplacer l'homotopie H par une homotopie $\widetilde{H}$ telle que $\widetilde{H}(\cdot,t)$ soit C^1 par morceaux (et même C^∞), $\forall\, t \in [0,1]$. [2]
3. Généralisation du lemme de Poincaré : si ω fermée et $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$, alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = \int_{\widetilde{\gamma}} \omega$.
4. Généralisation de la formule de Cauchy (I) : $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,dz$ si $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$.
5. L'indice est un invariant homotopique dans $U \setminus \{a\}$: $\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \operatorname{Ind}_{\widetilde{\gamma}}(a)$ si $\gamma \sim \widetilde{\gamma}$.

1. Preuve : É. Amar, É. Matheron, Analyse complexe, pp. 215–221

2. Idée de preuve. On prolonge $H(\cdot,t)$ par périodicité à $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\int \varphi = 1$. Soit $\varepsilon : [0,1] \to [0,\varepsilon_0]$ continue telle que $\varepsilon(0) = \varepsilon(1) = 0$ et $\varepsilon(t) > 0$ si $t \in]0,1[$. Soit $H \in C([0,1]\times[0,1];U)$ une homotopie de γ à $\widetilde{\gamma}$. On pose $\widetilde{H}(x,t) := \int_{\mathbb{R}} H(x-\varepsilon(t)y,t)\varphi(y)\,dy$. On note que $\widetilde{H}(x,t) = (1/\varepsilon(t))\int_{\mathbb{R}} H(y,t)\varphi((x-y)/\varepsilon(t))\,dy$, $\forall\, t \in]0,1[$; ceci implique $\widetilde{H}(\cdot,t) \in C^\infty$, $\forall\, t \in]0,1[$. Pour ε_0 suffisamment petit, on a $\widetilde{H}([0,1]\times[0,1]) \subset U$, et $\widetilde{H}$ a les propriétés requises.