Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3e année
Année 2020–2021

Devoir maison # 2
– à rendre le vendredi 18 décembre 2020 –

Exercices de routine

Exercice # 1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^n}.$$

On pourra utiliser le développement en série de l'exponentielle.

Solution (TT). Nous avons, pour tout $x\in]0,1[$:

$$\frac{1}{x^x} = \exp(-x\ln(x)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n(\ln(x))^n.$$

Soit $I_{n,k} := \displaystyle\int_0^1 x^n(\ln(x))^k\,dx$. En intégrant par parties, nous obtenons, si $k\geq 1$:

$$I_{n,k} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(\ln(x))^k\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot k(\ln(x))^{k-1}\cdot x^{-1}\,dx = -\frac{k}{n+1}I_{n,k-1}.$$

Il s'ensuit que

$$I_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}I_{n,0} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Ainsi, en utilisant d'abord le théorème 6.34, ensuite la proposition 6.43 :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n(\ln(x))^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}I_{n,n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}.\end{aligned}$$

□

Exercice # 2. Soit μ une probabilité sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $y>0$, soit

$$H_\mu(x,y) := \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{y^2+(x-t)^2}\,d\mu(t).$$

Le but de cet exercice est de montrer que si $H_\mu = H_\nu$, alors $\mu=\nu$.

a) Montrer que H_μ est continue.

b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{y\searrow 0} y\,H_\mu(x,y)$.

c) Soient $a<b$ deux réels. Déterminer $\displaystyle\lim_{y\searrow 0}\int_a^b H_\mu(x,y)\,dx$.

On pourra s'inspirer de la preuve du théorème 7.12 et utiliser le théorème de convergence dominée.

d) Soit ν une autre probabilité sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. On suppose que $H_\mu = H_\nu$. Montrer que $\mu = \nu$.
On pourra utiliser la proposition 4.23.

Solution (JK). $H_\mu(x,y)$ est une intégrale de Lebesgue, bien définie car la fonction $t \to \dfrac{y}{y^2+(x-t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc mesurable, et positive.

a) La fonction $(x,y) \to \dfrac{y}{y^2+(x-t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{>0}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $t \to \dfrac{y}{y^2+(x-t)^2}$ est continue, donc mesurable pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{>0}$. De plus, si $y_0 > 0$, alors pour tout $y \geq y_0$ on a $\dfrac{y}{y^2+(x-t)^2} \leq g(t) := \dfrac{1}{y_0}$ et $\displaystyle\int g d\mu = \frac{1}{y_0} < +\infty$. Par Thm. 7.14, H_μ est continue sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{>0}$.

b) On a $\pi y H_\mu(x,y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{y^2}{y^2+(x-t)^2} d\mu(t)$. $y \mapsto \dfrac{y^2}{y^2+(x-t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{>0}$ et admet une limite en 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$. De plus, $\dfrac{y^2}{y^2+(x-t)^2} \leq g(t) := 1$ et $\displaystyle\int g d\mu = 1 < +\infty$. Par Thm. 7.2, on a alors

$$\lim_{y\searrow 0} \pi y\, H_\mu(x,y) = \int_{\mathbb{R}} \lim_{y\searrow 0} \frac{y^2}{y^2+(x-t)^2} d\mu(t) = \int \chi_{\{x\}}(t) d\mu(t) = \mu(\{x\}).$$

(Bon, le Thm. 7.2 est formulé avec des limites des suites, mais c'est la même chose.)

c) On a

$$\int_a^b H_\mu(x,y)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_a^b \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{y^2+(x-t)^2} d\mu(t)dx.$$

Comme $y > 0$, $(t,x) \mapsto \dfrac{y}{y^2+(x-t)^2}$ est une fonction positive continue, donc mesurable sur $\mathbb{R}\times[a,b]$. Par Thm. 8.24, nous pouvons échanger les intégrales. Or, avec le changement de variable $z = \dfrac{x-t}{y}$ on obtient

$$\int_a^b \frac{y}{y^2+(x-t)^2} dx = \int_{\frac{a-t}{y}}^{\frac{b-t}{y}} \frac{1}{1+z^2} dz = \arctan\left(\frac{b-t}{y}\right) - \arctan\left(\frac{a-t}{y}\right),$$

ce qui donne

$$\int_a^b H_\mu(x,y)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\arctan\left(\frac{b-t}{y}\right) - \arctan\left(\frac{a-t}{y}\right)\right) d\mu(t).$$

Or,

$$\left|\arctan\left(\frac{b-t}{y}\right) - \arctan\left(\frac{a-t}{y}\right)\right| \leq g(t) := 2 \text{ et } \int g d\mu = 2.$$

De plus,

$$y \mapsto \arctan\left(\frac{b-t}{y}\right) - \arctan\left(\frac{a-t}{y}\right)$$

est continue sur $\mathbb{R}^{>0}$ et a une limite en 0. En effet,

$$\lim_{y\searrow 0}\left(\arctan\left(\frac{b-t}{y}\right) - \arctan\left(\frac{a-t}{y}\right)\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [a,b] \\ \pi & \text{si } t \in]a,b[\\ \frac{\pi}{2} & \text{si } t \in \{a,b\} \end{cases},$$

d'où, par Thm. 7.2,

$$\lim_{y\searrow 0} \int_a^b H_\mu(x,y)\,dx = \mu([a,b]) - \frac{\mu(\{a\}) + \mu(\{b\})}{2}.$$

d) Par Prop. 4.23, une mesure borélienne est uniquement déterminée par ses valeurs sur les intervalles fermés. Avec ce qui precéde, on a

$$\mu([a,b]) = \lim_{y\searrow 0}\left(\int_a^b H_\mu(x,y)\,dx + \frac{\pi y}{2}(H_\mu(a,y)+H_\mu(b,y))\right).$$

Ainsi, $H_\mu = H_\nu$ implique $\mu = \nu$. □

Exercice # 3. (Mesure superficielle) Si $S \subset \mathbb{R}^3$, nous définissons la *mesure superficielle* (aire) $\mathscr{A}(S)$ de S par

$$\mathscr{A}(S) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon}\,\nu_3(\{x\in\mathbb{R}^3\,;\,\operatorname{dist}(x,S)\le\varepsilon\})$$

(si l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}^3\,;\,\operatorname{dist}(x,S)\le\varepsilon\}$ est borélien pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et si la limite existe). Calculer $\mathscr{A}(S)$ si :

a) S est une sphère euclidienne.

b) S est un compact contenu dans $\mathbb{R}^2\times\{0\}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$).
Pour la question b), on pourra établir une inclusion de la forme

$$\{x\in\mathbb{R}^3\,;\,\operatorname{dist}(x,S)\le\varepsilon\} \subset K_\varepsilon\times[-\varepsilon,\varepsilon],$$

avec $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ convenable.

Solution (TT).

a) En utilisant l'invariance par translations de la mesure de Lebesgue, on peut supposer que $S = \{x\in\mathbb{R}^3; |x| = R\}$. Pour $0<\varepsilon<R$, soit $S_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}^3; \operatorname{dist}(x,S)\le\varepsilon\}$. Montrons d'abord que

$$S_\varepsilon = \{x\in\mathbb{R}^3; R-\varepsilon\le|x|\le R+\varepsilon\}.$$

Soit $x\in S_\varepsilon$. Notons que $x\neq 0$. Par la compacité de S, il existe $y\in S$ tel que $|x-y|\le\varepsilon$. Soit $x_0 := (R/|x|)x$, de manière que x_0 est le point d'intersection du rayon Ox avec S. On a

$$\big||x|-R\big| = |x-x_0| \le |x-y| \le \varepsilon,$$

et donc $x\in S_\varepsilon$.
Inversement, soit x tel que $\big||x|-R\big|\le\varepsilon$. Alors $|x-x_0|\le\varepsilon$, où x_0 est comme ci-dessus, et donc $x\in S_\varepsilon$.
Par ailleurs, S_ε est fermé et donc borélien.
Rappelons maintenant la formule pour le volume d'une boule de rayon R : $f(R) = \operatorname{Vol}(B(0,R)) = \operatorname{Vol}(\overline{B}(0,R)) = (4/3)\pi R^3$. On a :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(S) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\varepsilon}\nu_3(S_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(R+\varepsilon)-f(R-\varepsilon)}{2\varepsilon}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{f(R+\varepsilon)-f(R)}{\varepsilon}+\frac{f(R)-f(R-\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = f'(R) = 4\pi R^2.\end{aligned}$$

b) Soit $K = S\subseteq\mathbb{R}^2\subseteq\mathbb{R}^3$ et notons $K_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}^2; \operatorname{dist}(x,K)\le\varepsilon\}$ et $S_\varepsilon := \{x\in\mathbb{R}^3; \operatorname{dist}(x,K)\le\varepsilon\}$. Montrons d'abord que

$$K\times[-\varepsilon,\varepsilon]\subseteq S_\varepsilon\subseteq K_\varepsilon\times[-\varepsilon,\varepsilon].$$

Nous utiliserons la notation (x,y) pour un point dans $\mathbb{R}^3$, où $x\in\mathbb{R}^2$ et $y\in\mathbb{R}$. Pour voir la première inclusion, il suffit de remarquer que si $x\in K$, alors le point de K le plus proche de (x,y) est $(x,0)$,

et donc $\mathrm{dist}((x,y),K) = |y|$. Pour l'autre, si $(x,y) \in S_\varepsilon$, alors $\mathrm{dist}((x,0),K) \leq \mathrm{dist}((x,y),K) \leq \varepsilon$ et $|y| = \mathrm{dist}((x,y),\mathbb{R}^2) \leq \mathrm{dist}((x,y),K) \leq \varepsilon$ et donc $x \in K_\varepsilon$ et $y \in [-\varepsilon,\varepsilon]$.
Ensuite, rappelons que si $A \subseteq \mathbb{R}^2$ est borélien, alors $A \times [-\varepsilon,\varepsilon]$ est un pavé borélien et

$$\nu_3(A \times [-\varepsilon,\varepsilon]) = \nu_2(A) \cdot (2\varepsilon).$$

On a donc que

$$\nu_2(K) \leq (1/2\varepsilon)\nu_3(S_\varepsilon) \leq \nu_2(K_\varepsilon). \tag{1}$$

La prochaine étape est de montrer que $\nu_2(K_\varepsilon) \to \nu_2(K)$ quand $\varepsilon \to 0$. On voit que $K_\varepsilon \subseteq K_{\varepsilon'}$ pour $\varepsilon \leq \varepsilon'$ et il suffit donc de montrer que $\bigcap_n K_{1/n} = K$ et utiliser le théorème de la suite décroissante. L'inclusion $\supseteq$ est claire. Pour l'autre sens, soit $x \in \bigcap_n K_{1/n}$ et pour tout n, soit $x_n \in K$ tel que $|x - x_n| \leq 1/n$. On a donc que $x_n \to x$ et comme K est fermé, $x \in K$.
Enfin, en prenant la limite dans (1) on obtient $\mathscr{A}(K) = \nu_2(K)$. $\square$

Exercice # 4. (Calcul d'intégrales oscillantes) Pour $0 < a < 2$, soit

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx \text{ (intégrale généralisée).}$$

a) En établissant et utilisant l'identité

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt}\,dt,\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x > 0,$$

montrer que

$$I(a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,dt.$$

On pourra partir de légalité

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x^a}\,dx$$

et utiliser une estimation connue pour les intégrales généralisées de la forme $\displaystyle\int_A^\infty \sin x\, f(x)\,dx$.

b) En se ramenant à un calcul de fonction Bêta d'Euler, montrer que

$$I(a) = \frac{\Gamma(a/2)\,\Gamma(1-a/2)}{2\,\Gamma(a)}.$$

Indication : faire le changement de variable $t = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{1/2}$.

Solution (JK).

a) Notons

$$J := \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\,dt$$

(intégrale de Lebesgue ou généralisée), de sorte que l'identité à montrer est $I(a) = J$.
Au sens des intégrales généralisés (convergentes si $a > 0$ par le critère de Riemann)

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty s^{a-1} e^{-s}\,ds \overset{s=xt}{=} \int_0^\infty (xt)^{a-1} e^{-xt} x\,dt = x^a \int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt}\,dt$$

pour tout $x > 0$. Donc

$$I(a) = \lim_{A\to+\infty} I(a, A), \text{ où } I(a, A) := \int_0^A \frac{\sin(x)}{x^a}\, dx = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^A \int_0^\infty \sin(x) t^{a-1} e^{-xt}\, dt dx.$$

Notons également que $I(a, A)$ est bien définie en tant qu'intégrale généralisée convergente, car $\frac{\sin(x)}{x^a} \sim_{0+} \frac{1}{x^{a-1}}$, et $a - 1 < 1$.
On a

$$|\sin(x) t^{a-1} e^{-xt}| \le g(x, t) := x t^{a-1} e^{-xt}$$

et

$$\int_0^A \int_0^\infty g(x, t) dt dx = \int_0^A \frac{\Gamma(a)}{x^{a-1}}\, dx < \infty,$$

(car $a - 1 < 1$). Donc, d'après le théorème de Tonelli, la fonction $(x, t) \to \sin(x) t^{a-1} e^{-xt}$, qui est continue donc mesurable, est intégrable sur $[0, A] \times \mathbb{R}^{>0}$. De plus, on peut échanger l'ordre des intégrales et obtenir

$$I(a, A) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \int_0^A \sin(x) t^{a-1} e^{-xt}\, dx dt.$$

De même, en utilisant l'identité

$$\int_0^\infty \sin(x) e^{-xt}\, dx = \frac{1}{t^2+1} \text{ (intégrale généralisée)},$$

nous avons

$$J = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\, dt = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin(x) t^{a-1} e^{-xt}\, dx dt.$$

Montrons maintenant que

$$\lim_{A\to\infty} I(a, A) = J,$$

ce qui achève la preuve.
Pour ce faire, nous utilisons l'inégalité $\left| \int_A^\infty \sin(x) f(x) dx \right| \le 2 f(A)$, vue en TD, valable pour une fonction f sur $[A, +\infty[$, qui est positive, décroissante, de classe C^1 et de limite 0 à l'infini. (L'intégrale qui intervient dans cette inégalité est une intégrale généralisée.) On l'applique à $f(x) := e^{-xt}$, $t > 0$, pour déduire que

$$\left| \int_A^\infty \sin(x) e^{-xt}\, dx \right| \le 2 e^{-At}.$$

D'où (via l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles pour les intégrales généralisées)

$$\begin{aligned} |I(a, A) - J| &= \frac{1}{\Gamma(a)} \left| \int_0^\infty \int_A^\infty \sin(x) t^{a-1} e^{-xt}\, dt dx \right| \\ &\le \frac{2}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-At}\, dt \overset{t=s/A}{=} \frac{2}{A^a \Gamma(a)} \int_0^\infty s^{a-1} e^{-s}\, ds \\ &= \frac{2}{A^a} \to 0 \text{ quand } A \to \infty, \end{aligned}$$

car $a > 0$.

b) Avec le changement de variable indiqué, on obtient

$$
\begin{aligned}
I(a) &= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^1 \frac{z^{\frac{a-1}{2}}}{(1-z)^{\frac{a-1}{2}} \left(1 + \frac{z}{1-z}\right)} \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}(1-z)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{1}{2\Gamma(a)} \int_0^1 z^{\frac{a}{2}-1}(1-z)^{-\frac{a}{2}} dz = \frac{B(\frac{a}{2}, 1-\frac{a}{2})}{2\Gamma(a)}.
\end{aligned}
$$

Ici B est la fonction Beta de Euler. Elle satisfait $\Gamma(x+y)B(x,y) = \Gamma(x)\Gamma(y)$. Donc

$$
I(a) = \frac{\Gamma(\frac{a}{2})\Gamma(1-\frac{a}{2})}{2\Gamma(a)}. \qquad \square
$$

Exercice # 5. (Théorème d'Egoroff (ou Egorov)) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ *finie*. Soient $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables telles que $f_n \to f$ (convergence simple). Le théorème d'Egoroff affirme que $f_n \to f$ « presque uniformément », au sens suivant :

$$
\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, C \in \mathscr{T} \text{ tel que } \mu(C) < \varepsilon \text{ et } f_n \to f \text{ uniformément sur } X \setminus C. \tag{2}
$$

(La convergence uniforme reviendrait à $C = \emptyset$.)

Prouver ce résultat comme suit.

Soit $(N_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$. Posons

$$
\begin{aligned}
&A_{k,N_k} := \left\{ x \in X\, ;\, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k},\ \forall\, n \geq N_k \right\}, \\
&B := \bigcap_{k\geq 1} A_{k,N(k)}.
\end{aligned}
$$

(L'ensemble B dépend à la fois de la suite $(f_n)_n$ et de la suite $(N_k)_k$.)

a) Montrer que $A_{k,N_k}, B \in \mathscr{T}$.

b) Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur B.

c) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que $\mu(X \setminus A_{k,N_k}) < \varepsilon/2^k$.

d) Pour N_k comme dans la question précédente, montrer que $\mu(X \setminus B) < \varepsilon$. Conclure.

Solution (TT).

a) On a que $A_{k,N_k} = \bigcap_{n\geq N_k} C_{k,n}$, où $C_{k,n} := (f_n - f)^{-1}(]-1/k, 1/k[)$. Chaque $C_{k,n}$ est mesurable comme la préimage d'un ouvert par une fonction mesurable et A_{k,N_K} et B sont mesurables comme intersections dénombrables d'ensembles mesurables.

b) Par définition, $f_n \to f$ uniformément sur B ssi

$$
\forall k\, \exists N\, \forall n \geq N\, \forall x \in B \quad |f_n(x) - f(x)| < 1/k.
$$

Étant donné k, il suffit de prendre $N := N_k$ et utiliser la définition de B.

c) Soient $\varepsilon > 0$ et k donnés. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, soit

$$
C_N := \{x \in X; \forall n \geq N\, |f_n(x) - f(x)| < 1/k\}.
$$

Notons que $(C_N)_N$ est une suite croissante et, comme $f_n \to f$ simplement, $\bigcup_N C_N = X$. Le théorème de la suite croissante donne $\mu(C_N) \nearrow \mu(X)$. Posons

$$
N_k := \min\{N \in \mathbb{N}\, ;\, \mu(C_N) > \mu(X) - \varepsilon/2^k\}.
$$

Il reste seulement à observer que $C_{N_k} = A_{k,N_k}$.

d) Nous avons :

$$\mu(X \setminus B) \leq \sum_k \mu(X \setminus A_{k,N_k}) \leq \sum_k \varepsilon/2^k = \varepsilon,$$

et la question b) nous permet de conclure. $\square$

Exercice # 6. (Lemme de Brezis-Lieb) *Préliminaire.* Un cas particulier du lemme de Fatou est le suivant. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f_n \geq 0$ est mesurable, $\forall\, n$, et $f_n \to f$, alors $\displaystyle\int f \leq \liminf_n \int f_n$. Le lemme de Brezis-Lieb, qui s'applique à des situations plus générales, permet, dans ce cas particulier, de « mesurer » l'écart entre $\displaystyle\int f$ et $\displaystyle\liminf_n \int f_n$.

Dans ce qui suit, les fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ sont supposées mesurables, avec $(X, \mathscr{T}, \mu)$ mesuré.

a) Supposons $f_n \to f$ et f_n, f intégrable. Montrer que

$$\int |f_n| = \int |f| + \int |f_n - f| + o(1) \text{ quand } n \to \infty.$$ [1]

On pourra commencer par établir l'inégalité

$$-|f| \leq |f_n| - |f_n - f| \leq |f|$$

et utiliser le théorème de convergence dominée.

b) De même si f_n, f sont intégrables et $f_n \to f$ p. p.

c) En déduire le corollaire suivant : si u_n, u sont des fonctions mesurables positives telles que $u_n \to u$ p. p., et si $\displaystyle\int u_n \to \int u < \infty$, alors $\displaystyle\int |u_n - u| \to 0$.

d) (Attention, hypothèse inhabituelle concernant p) Soit $0 < p < 1$. En reprenant la preuve de a), montrer le résultat suivant. Si $f_n \to f$ et $\displaystyle\int |f_n|^p < \infty$, $\displaystyle\int |f|^p < \infty$, alors

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \to \infty. \tag{3}$$

Solution (JK).

a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. L'inégalité triangulaire $|a+b| \leq |a| + |b|$ implique $|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$ et $|a - b| \leq |a| + |b|$. D'où $-|b| \leq |a| - |a - b| \leq |b|$. On applique cela à $a := f_n(x)$ et $b := f(x)$. Ainsi, $||f_n(x)| - |f_n(x) - f(x)|| \leq |f(x)|$ pour tout x et n. Ceci montre que $|f_n(x)| - |f_n(x) - f(x)|$ est intégrable et que les conditions du théorème de la convergence dominée sont satisfaites pour obtenir

$$\lim_n \int (|f_n| - |f_n - f|) = \int \lim_n (|f_n| - |f_n - f|) = \int |f|.$$

Donc $c_n := \displaystyle\int (|f_n| - |f_n - f|) - \int |f|$ est une suite qui tend vers 0. Ajoutant $\displaystyle\int |f_n - f|$ nous trouvons

$$\int (|f_n| - |f_n - f|) + \int |f_n - f| = \int |f| + \int |f_n - f| + c_n.$$

Finalement, comme $|f_n| - |f_n - f|$ est intégrable et $|f_n - f|$ positive on a (Prop. 6.28)

$$\int (|f_n| - |f_n - f|) + \int |f_n - f| = \int (|f_n| - |f_n - f| + |f_n - f|) = \int |f_n|.$$

1. Rappelons que $o(1)$ quand $n \to \infty$ désigne une suite (c_n) telle que $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

b) Comme ci-dessus, mais cette fois-ci nous utilisons la variante p. p. du théorème de convergence dominée. La mesurabilité de f doit être supposée par hypothèse ; elle ne découle pas de celle de f_n.

c) *On n'a pas utilisé le fait que les f_n sont intégrables, mais seulement que f est intégrable.* Donc on peut appliquer ce qui précède à $f_n := u_n$ et $f := u$ pour déduire que

$$\int |u_n - u| = \int u_n - \int u + o(1),$$

et donc

$$\lim_n \int |u_n - u| = \lim_n \int u_n - \int u = 0.$$

d) Montrons, pour $0 < p \leq 1$ et $a, b \in \mathbb{R}$, l'inégalité

$$|a + b|^p \leq |a|^p + |b|^p.$$

Comme $|a - b| \leq |a + b|$ si a et b ont signe opposé il suffit de considérer le cas a, b positifs et, de plus, $a \neq 0$. Par homogenéité (de degré p) de $f(x) = x^p$, $x \geq 0$, il suffit de montrer l'inégalité pour $a = 1$. L'inégalité correspond donc à $f(x+1) \leq 1 + f(x)$ pour $x \geq 0$. $f'(x) = px^{p-1}$ est décroissante, donc $f'(x+1) f'(x)'$. Il s'ensuit que $\int_0^x f'(y+1)\, dy \leq \int_0^x f'(y)\, dy$, d'où $f(x+1) - f(1) \leq f(x) - f(0) = f(x)$, ce qui permet de conclure.
On déduit de cette inégalité, comme dans le cas $p = 1$, que $-|b|^p \leq |a|^p - |a - b|^p \leq |b|^p$, et le reste suit exactement comme dans le cas $p = 1$. □

Exercice # 7. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions μ-intégrables qui convergent vers 0 simplement. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int f_n = \int \sum_{n\geq 0} (-1)^n f_n.$$

On pourra utiliser la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées.

Solution (TT). Soit $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k(x)$. Nous avons que :

$$\begin{aligned} S_{2n+1}(x) &= S_{2n-1}(x) + (f_{2n}(x) - f_{2n+1}(x)) \leq S_{2n-1}(x) \quad \text{et} \\ S_{2n+2}(x) &= S_{2n}(x) - (f_{2n+1}(x) - f_{2n+2}(x)) \geq S_{2n}(x). \end{aligned}$$

Ainsi, $(S_{2n+1})_n$ est une suite croissante, $(S_{2n})_n$ est une suite décroissante et, pour tout n, $S_{2n} \geq S_{2n+1}$. De plus $S_{2n} - S_{2n+1} = f_{2n+1}$ converge simplement vers 0 quand $n \to \infty$. Ceci implique que la fonction

$$f(x) := \lim_n S_{2n}(x) = \lim_n S_{2n+1}(x) = \sum_n (-1)^n f_n(x)$$

est bien définie. En appliquant le théorème de convergence monotone, nous obtenons :

$$\int f = \int \lim_n S_{2n+1} = \lim_n \int S_{2n+1}. \tag{4}$$

Soit $a_k := \int f_k$. Par le théorème de convergence dominée, $a_k \to 0$. En utilisant le théorème de Leibniz, nous avons :

$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k a_k = \lim_n \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k a_k = \lim_n \int S_{2n+1}.$$

Ceci mis ensemble avec (4) nous permet de conclure. □

Exercice # 8. Dans ce qui suit, $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes. Le problème que nous étudions est le suivant : montrer qu'il existe $J \subset [\![1, \ldots, n]\!]$ tel que la somme

$$S_J := \left|\sum_{j\in J} z_j\right|$$

soit « grande ». Précisons d'abord le problème. Nous avons

$$S_J \leq \sum_{j\in J} |z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| := S,$$

et donc S_J ne peut pas dépasser S. Nous nous proposons de montrer qu'il existe J tel que « S_J soit une partie significative de S ».

Je ne connais pas la réponse à la question c) (et elle n'est pas demandée). Les questions d) et e) sont indépendantes de a) et b).

Clairement, pour $n = 1$ le meilleur choix est de prendre $J := \{1\}$, et dans ce cas $S_1 = S = |z_1|$. Étudions le cas $n \geq 2$.

a) Si $n = 2$, montrer qu'il est possible de choisir J tel que

$$S_J \geq \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} |z_j|,$$

et que la constante $\dfrac{1}{2}$ est la meilleure possible.

b) Si $n = 3$, montrer qu'il est possible de choisir J tel que

$$S_J \geq \frac{1}{3}S = \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} |z_j|,$$

et que la constante $\dfrac{1}{3}$ est la meilleure possible.

c) (Je ne connais pas la réponse) Quelle est la meilleure constante si $n = 4$? En tout cas, elle n'est pas $\dfrac{1}{4}$. En effet, nous allons montrer le résultat suivant.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C},\ \exists\, J \subset [\![1, n]\!] \text{ tel que } S_J \geq \frac{1}{\pi}S. \tag{5}$$

Dans ce qui suit, le produit scalaire des nombres complexes $\langle\ ,\ \rangle$ est le *produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^2$.

d) Soit $\omega = e^{\imath t}$ un nombre complexe de module 1. Posons

$$J_t := \{j \in [\![1, n]\!]\, ;\ \langle z_j, \omega\rangle \geq 0\}.$$

(Donc J_t contient les j tels que l'angle entre z_j et ω soit $\leq \pi/2$.)

Montrer que

$$\left|\sum_{j\in J_t} z_j\right| \geq \sum_{j\in J_t} \langle z_j, \omega\rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle z_j, \omega\rangle_+. \tag{6}$$

Rappelons que x_+ est la partie positive de x : $x_+ := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

e) Calculer

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \langle z_j, e^{\imath t}\rangle_+ \, dt$$

et obtenir (5) grâce à (6).

Solution (JK).

a) Étant donné $\{z_1, z_2\}$, on choisit $J := \{j\}$, avec j t.q. $|z_j| = \max_i |z_i|$. Alors $2|z_j| \geq |z_1| + |z_2|$. Ceci montre que $S_J \geq \frac{1}{2}S$. Dans le cas où $z_1 = -z_2$, on voit que $S_{\{i\}} = \frac{1}{2}S$, $i = 1, 2$, et $S_\emptyset = S_{\{1,2\}} = 0$. Donc $\max_{J \subset \{1,2\}} \frac{S_J}{S} = \frac{1}{2}$ dans ce cas.

b) Étant donné $\{z_1, z_2, z_3\}$ on choisit $J = \{j\}$, avec j t.q. $|z_j| = \max_i |z_i|$. Alors $3|z_j| \geq |z_1| + |z_2| + |z_3|$, ce qui montre que $S_J \geq \frac{1}{3}S$. Dans le cas où $z_i = w^i$, avec w une racine 3e de 1, on voit que $S_{\{i\}} = S_{\{i\}^c} = \frac{1}{3}S$, $i = 1, 2, 3$, et $S_\emptyset = S_{\{1,2,3\}} = 0$. Donc $\max_{J \subset \{1,2,3\}} \frac{S_J}{S} = \frac{1}{3}$ dans ce cas. (Ceci utilise $|w^i + w^j| = |w^k|$ si $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.)

d) Nous avons (par Cauchy-Schwarz)

$$\left|\sum_{j \in J_t} z_j\right| \geq \left|\left\langle \sum_{j \in J_t} z_j, \omega \right\rangle\right| = \sum_{j \in J_t} \langle z_j, \omega\rangle = \sum_{j=1}^n \langle z_j, \omega\rangle_+.$$

e) Nous avons à faire à des intégrales de Riemann de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$. Par linéarité, on peut échanger l'intégrale avec la somme. Avec $r_j := |z_j|$ et $z_j = r_j e^{i\varphi_j}$, on obtient $\langle z_j, e^{\imath t}\rangle = r_j \cos(\varphi_j - t)$ et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \langle z_j, e^{\imath t}\rangle_+ dt &= r_j \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi_j - t)]_+ d\varphi_j = r_j \int_{\varphi_j - \pi}^{\varphi_j + \pi} [\cos(\varphi_j - t)]_+ d\varphi_j \\ &= r_j \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\varphi) d\varphi = r_j \left[\sin(\varphi)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2r_j.\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \langle z_j, e^{\imath t}\rangle_+ \, dt = 2\sum_{j=1}^n |z_j| = 2S$$

et

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^n \langle z_j, e^{\imath t}\rangle_+ \, dt \leq \max_{t \in [0,2\pi]} \sum_{j=1}^n \langle z_j, e^{\imath t}\rangle_+ \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \max_{t \in [0,2\pi]} \sum_{j=1}^n \langle z_j, e^{\imath t}\rangle_+.$$

Donc, avec d),

$$S \leq \pi \max_{t \in [0,2\pi]} \sum_{j \in J_t} \langle z_j, e^{\imath t}\rangle \leq \pi \max_{t \in [0,2\pi]} \left|\sum_{j \in J_t} z_j\right|.$$

On choisit alors t pour maximiser le terme de la droite (le $\max$ existe, car $t \mapsto \sum_{j \in J_t} z_j$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs) et on pose $J := J_t$.

□

Exercice # 9. (Intégration par parties (I)) Nous travaillons dans $([0,\infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \nu_1)$. Soient $f, g \in \mathscr{L}^1$. Soient $F(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\,dt$, $G(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} g(t)\,dt$, $\forall\, x \geq 0$.

a) Montrer que F et G sont bien définies.

b) Montrer que F et G sont continues et bornées.
Pour la continuité, on pourra s'inspirer de la preuve du théorème 7.12, variante p. p.

c) Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_0^\infty F(x)g(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\,dx \int_0^\infty g(x)\,dx - \int_0^\infty f(x)G(x)\,dx.$$

Solution (PM). Les intégrales de l'énoncé sont des intégrales de Lebesgue.

a) $[0,x]$ est un borélien de $\mathbb{R}$, donc de $[0,\infty[$ (exercice 2.19, qui s'applique car $[0,x] = [0,x] \cap [0,\infty[$). La conclusion suit de la proposition 6.35 a).

b) Il suffit de considérer F. Une possibilité est de reprendre la solution de l'exercice 24 de la feuille 4 (première question).
Voici une autre solution, qui donne une conclusion *plus forte*. Soient $x, y \in [0,\infty[$. Supposons par exemple $x < y$. En utilisant la proposition 6.35 b) appliquée à f restreinte à $[0,y]$ et le fait que les intervalles sont des boréliens, nous obtenons $F(y) = F(x) + \displaystyle\int_{]x,y]} f(t)\,dt$. De même, si $x > y$, alors $F(y) = F(x) - \displaystyle\int_{]y,x]} f(t)\,dt$. Il s'ensuit que

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_{A(x,y)} f(t)\,dt\right| \leq \int_{A(x,y)} |f(t)|\,dt, \text{ avec } A(x,y) \text{ intervalle de longueur } |y-x|.$$

Le lemme de Lebesgue (exercice 15 de la feuille de synthèse) donne

$$\lim_{|y-x|\to 0} |F(y) - F(x)| = 0,$$

et donc F est *uniformément continue*.
L'inégalité triangulaire et l'hypothèse $f \in \mathscr{L}^1$ donnent

$$|F(x)| = \left|\int_{[0,\infty[} f\chi_{0,x]}\right| \leq \int_{[0,\infty[} |f\chi_{[0,x]}| \leq \int_{[0,\infty[} |f| < \infty,$$

et donc F est bornée.

c) Soient :

$$h : [0,\infty[^2 \to \mathbb{R},\ h(x,y) := f(x)g(y),\ \forall\, x, y \in [0,\infty[,$$
$$A := \{(x,y) \in [0,\infty[^2\,;\ 0 \leq y \leq x\},\ B := \{(x,y) \in [0,\infty[^2\,;\ 0 \leq x < y\}.$$

Vérifions que h est borélienne. Notons d'abord que son domaine de définition est fermé, donc borélien. Désignons par $\widetilde{\ }$ le prolongement par 0 en dehors du domaine de définition. Par hypothèse, $\widetilde{f}, \widetilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont boréliennes. Clairement, $\widetilde{fg}(x,y) = \widetilde{f}(x)\widetilde{g}(y)$. Il s'ensuit qu'il suffit de montrer que, si $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne, alors $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \ni (x,y) \mapsto b(x,y) := a(x)$ est encore borélienne (puis on applique ce résultat, avec $n = m = 1$, à $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$, et on utillise la proposition 3.25 a)). Soit $C \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Alors

$$b^{-1}(C) = \{(x, y \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m\,;\ a(x) \in C\} = a^{-1}(C) \times \mathbb{R}^m \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}\,;$$

pour l'inclusion finale, nous utilisons les définitions 8.1 et 8.2, et la proposition 8.3).

Ensuite, notons que A est borélien (car fermé), donc borélien de $[0,\infty[^2$ (voir la question a)). Il s'ensuit que $B = [0,\infty[^2 \setminus A$ est un borélien de $[0,\infty[^2$.

Pour compléter la preuve, nous allons montrer (en utilisant le théorème de Fubini local) que l'égalité à montrer revient à

$$\int_{[0,\infty[^2} h(x,y)\,dxdy = \int_A h(x,y)\,dxdy + \int_B h(x,y)\,dxdy\,;$$

au passage, nous montrerons que h est intégrable. En admettant cette équivalence et l'intégrabilité de h, nous concluons grâce à la proposition 6.35 b).

Étape 1. h est ν_2-intégrable sur $[0,\infty[^2$. (Et donc, par l'inégalité triangulaire, h est intégrable sur A et B.) En effet, ceci suit du corollaire 8.25, en utilisant le théorème de Tonelli local, qui donne

$$\int_{[0,\infty[^2} |h(x,y)|\,dxdy = \int_{[0,\infty[} |f(x)| \int_{[0,\infty[} |g(y)|\,dy\,dx < \infty$$

(car $f, g \in \mathscr{L}^1$).

Ceci justifie l'utilisation du théorème de Fubini local dans les trois étapes qui suivent.

Étape 2. Calcul de $\displaystyle\int_{[0,\infty[^2} h(x,y)\,dxdy$. Nous avons

$$\int_{[0,\infty[^2} h(x,y)\,dxdy = \int_{[0,\infty[} f(x) \int_{[0,\infty[} g(y)\,dy\,dx = \int_{[0,\infty[} f(x)\,dx \int_{[0,\infty[} g(y)\,dy.$$

Étape 3. Calcul de $\displaystyle\int_A h(x,y)\,dxdy$. Nous avons

$$\int_A h(x,y)\,dxdy = \int_{[0,\infty[} f(x) \int_{[0,x]} g(y)\,dy\,dx = \int_{[0,\infty[} f(x)G(x)\,dx.$$

Étape 3. Calcul de $\displaystyle\int_B h(x,y)\,dxdy$. Nous avons

$$\begin{aligned}\int_B h(x,y)\,dxdy &= \int_{]0,\infty[} g(y) \int_{[0,y[} f(x)\,dx\,dy = \int_{[0,\infty[} g(y) \int_{[0,y]} f(x)\,dx\,dy\\ &= \int_{[0,\infty[} F(y)g(y)\,dy.\end{aligned}$$

□

Exercice # 10. (Intégration par parties (II)) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$ et $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

a) Soit $g \in C(\mathbb{R})$ intégrable. Montrer qu'il existe une suite $(R_j)_j \subset [0,\infty[$ telle que $R_j \to \infty$, $g(R_j) \to 0$ et $g(-R_j) \to 0$.

   On pourra commencer par montrer que $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \int_{[j \le |x| \le j+1]} |g| = 0$, et montrer que l'on peut choisir $R_j \in]j, j+1[$.

b) Soit $h \in C^1(\mathbb{R})$, avec h et h' intégrables.

   (i) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h' = 0$.

   (ii) Montrer que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\eta} h'(x)\,dx = \imath\eta \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\eta} h(x)\,dx$.

c) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, avec f et $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ intégrables. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx = \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

d) Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $0 < M < \infty$. Proposer et montrer une formule de la forme

$$\int_{[-M,M]^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx = \int_{[-M,M]^{n-1}} h(x_2, \ldots, x_n)\, d(x_2, \ldots, x_n) - \int_{[-M,M]^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.$$

e) Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ bornées telles que $f, g, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g}{\partial x_1}$ soient intégrables. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.$$

Solution (PM). Notons que toutes les fonctions de l'énoncé sont continues (ou mieux), donc boréliennes, et les ensembles sont des intervalles de $\mathbb{R}$ ou des fermés de $\mathbb{R}^n$, donc des boréliens. Il s'ensuit facilement que toutes les fonctions et les ensembles considérés ci-dessous sont boréliens.

a) Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{j\to\infty} \int_{j\le|x|\le j+1} |g| = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |g|\chi_{[j,j+1]} = 0$$

(la majoration est $||g|\chi_{[j,j+1]}| \le |g| \in \mathscr{L}^1$).
Via les propositions 6.35, 6.42 et le changement de variables $x = -y$ dans une intégrale de Riemann, nous obtenons

$$\int_{j\le|x|\le j+1} = \int_{-j-1}^{j} |g(x)|\, dx + \int_{j}^{j+1} |g(x)|\, dx = \int_{j}^{j+1} (|g(x)| + g(-x)|)\, dx.$$

Le théorème de Lagrange donne l'existence d'un $R_j \in]j, j+1[$ tel que

$$\int_{j}^{j+1} (|g(x)| + g(-x)|)\, dx = |g(R_j)| + |g(-R_j)|,$$

d'où la conclusion.
Variante, sous l'hypothèse plus faible g borélienne et intégrable. Cette fois-ci, il faut faire le changement de variable $x = -y$ dans l'intégrale de Lebesgue $\displaystyle\int_{[-j-1,-j]} |g|$.
À la fin de la preuve, au lieu d'utiliser le théorème de Lagrange, nous utilisons l'exercice 12 de la feuille de synthèse (appliqué à la mesure de Lebesgue sur $[j, j+1]$) pour obtenir l'existence d'un $S_j \in [j, j+1]$ tel que

$$|g(S_j)| + |g(-S_j)| \le \int_{[j,j+1]} (|g(x)| + g(-x)|)\, dx.$$

b) (i) Soit $(R_j) \subset]0, \infty[$ telle que $R_j \to \infty$ et $h(R_j), h(-R_j) \to 0$. Le théorème de convergence dominée donne

$$\int_{\mathbb{R}} h' = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h'\chi_{[-R_j,R_j]} = \lim_{j\to\infty} \int_{[-R_j,R_j]} h'$$

(la domination étant $|h'\chi_{[-R_j,R_j]}| \leq |h'| \in \mathscr{L}^1$).

La proposition 6.42 et le théorème de Leibniz-Newton impliquent

$$\int_{[-R_j,R_j]} h' = \int_{-R_j}^{R_j} h'(x)\, dx = h(R_j) - h(-R_j),$$

d'où la conclusion.

(ii) Soit $k(x) := e^{-\imath x\eta} h(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Nous avons $k \in C^1(\mathbb{R})$ et $|k| = |h|$, d'où $k \in \mathscr{L}^1$. Par ailleurs, nous avons $k'(x) = -\imath\eta k(x) + e^{-\imath x\eta} h'(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, d'où $|k'| \leq |\eta|\,|h| + |h'| \in \mathscr{L}^1$, et donc $k' \in \mathscr{L}^1$. La question précédente donne $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} k'(x)\, dx = 0$, ou encore

$$\int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\imath x\eta} h'(x) - \imath\eta k(x)\right)\, dx = 0.$$

Pour conclure, il suffit de noter que $\imath\eta k(x)$ est intégrable (voir ci-dessus) et d'utiliser la linéarité de l'intégrale (proposition 6.28).

c) Le théorème de Fubini donne l'existence de $A, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n-1}}$ tels que :

1. $\nu_{n-1}(A) = \nu_{n-1}(B) = 0$;
2. pour tout $y = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus A$, $x_1 \mapsto f(x_1, y)$ est ν_1-intégrable;
3. pour tout $y = (x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus B$, $x_1 \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, y)$ est ν_1-intégrable.

Soit $C := A \cup B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n-1}}$. Si $y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus (A \cup B)$, alors la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, y)$ vérifie les hypothèses de la question b), et donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x_1\xi_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y)\, dx_1 = \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x_1\xi_1} f(x_1, y)\, dx_1,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus C,\ \forall\, \xi_1 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Écrivons $\xi = (\xi_1, \eta)$. En multipliant (7) par $e^{-\imath y\cdot\eta}$, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath(x_1\xi_1 + y\cdot\eta)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y)\, dx_1 = \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath(x_1\xi_1 + y\cdot\eta)} f(x_1, y)\, dx_1,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus C,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Par ailleurs, notons que :

1. $f \in \mathscr{L}^1$;
2. $\left|e^{-\imath x\cdot\xi} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right| = \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)\right|$, et donc $x \mapsto e^{-\imath x\cdot\xi} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x) \in \mathscr{L}^1$;
3. C, A, B, $A \setminus B$, $B \setminus A$ sont des boréliens négligeables.

De (8), ce qui précède, le théorème de Fubini, et le corollaire 6.21, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus B} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath(x_1\xi_1 + y\cdot\eta)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y)\, dx_1\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus C} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath(x_1\xi_1 + y\cdot\eta)} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y)\, dx_1\, dy \\
&= \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus C} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath(x_1\xi_1 + y\cdot\eta)} f(x_1, y)\, dx_1\, dy \\
&= \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus A} \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath(x_1\xi_1 + y\cdot\eta)} f(x_1, y)\, dx_1\, dy = \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi}\, dx.
\end{aligned}$$

d) Notons qu'une fonction continue g sur un compact $K \subset \mathbb{R}^k$ est ν_k-intégrable. Ceci suit de

$$\int_K |g| \leq \int_K \max_K |g| = \nu_k(K) \max_K |g| < \infty.$$

Il s'ensuit que toutes les fonctions considérées ci-dessous sont intégrables, et en particulier que le théorème de Fubini local s'applique. En appliquant ce théorème, la proposition 6.42, la linéarité des intégrales (qui sont toutes finies) et en effectuant une intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{[-M,M]^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx &= \int_{[-M,M]^{n-1}} \int_{[-M,M]} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y) g(x_1, y)\, dx_1\, dy \\
&= \int_{[-M,M]^{n-1}} \int_{-M}^{M} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, y) g(x_1, y)\, dx_1\, dy \\
&= \int_{[-M,M]^{n-1}} ((fg)(M, y) - (fg)(-M, y))\, dy \\
&\quad - \int_{[-M,M]^{n-1}} \int_{-M}^{M} f(x_1, y) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, y)\, dx_1\, dy \\
&= \int_{[-M,M]^{n-1}} ((fg)(M, y) - (fg)(-M, y))\, dy \\
&\quad - \int_{[-M,M]^{n-1}} \int_{[-M,M]} f(x_1, y) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, y)\, dx_1\, dy \\
&= \int_{[-M,M]^{n-1}} ((fg)(M, y) - (fg)(-M, y))\, dy \\
&\quad - \int_{[-M,M]^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat demandé, avec $h(y) := (fg)(M, y) - (fg)(-M, y)$.

e) Le produit d'une fonction borélienne bornée et d'une fonction borélienne intégrable est une fonction borélienne intégrable (ceci est un cas particulier de l'inégalité de Young). Il s'ensuit que fg, $f\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}g$ sont intégrables. Soit $(M_j) \subset]0, \infty[$ une suite telle que $M_j \to \infty$. Le théorème de convergence dominée donne (comme, par exemple, dans la question b) (ii))

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} \int_{[-M_j,M_j]} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx, \\
\lim_{j\to\infty} \int_{[-M_j,M_j]} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

De ce qui précède et l'identité trouvée à la question d), il suffit de trouver une suite (M_j) telle que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{[-M_j,M_j]^{n-1}} (|(fg)(M_j, y)| + |(fg)(-M_j, y)|)\, dy = 0.$$

En utilisant la monotonie de l'intégrale, il suffit d'obtenir une suite (M_j) telle que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (|(fg)(M_j, y)| + |(fg)(-M_j, y)|)\, dy = 0. \tag{9}$$

L'existence s'obtient en appliquant la question a) à la fonction borélienne et intégrable

$$\mathbb{R} \ni x_1 \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |(fg)(x_1, y)|\, dy$$

(le fait que cette fonction soit borélienne et intégrable suit de l'intégrabilité de fg et du théorème de Tonelli). $\square$

Exercices avancés

Exercice # 11. (Unicité des mesures *à la* Lebesgue)
I. Soit (X, d) un espace métrique tel que

$$\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X = \mathscr{B}_{X\times X} \tag{10}$$

(nous verrons en partie II de l'exercice une condition *suffisante* pour la validité de (10)).

Exemple : $X = \mathbb{R}^n$ muni de l'une des métriques induites par une norme $\| \ \|$.

Une mesure borélienne μ sur X est *uniformément répartie* si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall\, x, y \in X, \forall\, r > 0,\ 0 < \mu(B(x, r)) = \mu(B(y, r)) < \infty.$$

Le but de cet exercice est de montrer que deux mesures uniformément réparties sont proportionnelles.

En admettant cette conclusion, nous obtenons une autre caractérisation de la mesure de Lebesgue (voir l'item i) ci-dessous).

Soient μ et ν deux mesures uniformément réparties. Soient $g(r) := \mu(B(x, r))$, $h(r) := \nu(B(x, r))$, $\forall\, r > 0$ (ces fonctions dépendent de r, mais pas de $x \in X$).

Dans ce qui suit, U désigne un ouvert non vide et borné de X.

a) Montrer que μ et ν sont σ-finies.
b) Montrer que $0 < \mu(U) < \infty$ et $0 < \nu(U) < \infty$.
c) Montrer que $V := \{(x, y)\,;\, x,\, y \in U,\, d(x, y) < r\}$ est un borélien de $X \times X$.
d) Montrer que

$$U \ni x \mapsto \nu(U \cap B(x, r))$$

est borélienne.

e) Montrer que

$$\int_U \nu(U \cap B(x, r))\, d\mu(x) = \int_U \mu(U \cap B(y, r))\, d\nu(y).$$

(On pourra calculer $\mu \otimes \nu(V)$.)

f) Montrer que

$$\mu(U) = \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U (\nu(U \cap B(x, r)))\ d\mu(x),$$
$$\nu(U) = \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{g(r)} \int_U (\mu(U \cap B(y, r)))\ d\nu(y).$$

g) En déduire qu'il existe un réel $0 < C < \infty$ (indépendant de U) tel que $\mu(U) = C\,\nu(U)$.
h) Conclure.
i) Soit d la distance induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence suivante :
   (i) μ est uniformément répartie sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.
   (ii) Il existe $0 < C < \infty$ telle que $\mu = C\,\nu_n$.

II. Nous donnons ici une condition *suffisante* pour la validité de (10), condition qui est satisfaite en particulier par $\mathbb{R}^n$ avec l'une de ses métriques usuelles.

Voici une question d'échauffement.

a) Montrer que, si (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques *arbitraires*, alors $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X\times Y}$. (Penser à la preuve de l'inclusion $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.)
Donc si une inclusion pose problème dans la vérification de (10), il s'agit de $\mathscr{B}_{X\times Y} \subset \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$. *En général, cette inclusion est fausse,* mais donner un contre-exemple dépasse le cadre de cet exercice.

Un espace métrique (X, d) est *séparable* s'il existe un ensemble a. p. d. $A \subset X$ dense dans X, donc tel que $\overline{A} = X$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est séparable.

c) Si X est séparable, montrer que pour tout ouvert U nous avons

$$U = \bigcup_{\substack{a\in A, r\in\mathbb{Q} \\ B(a,r)\subset U}} B(a, r).$$

d) Si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, montrer que $X \times Y$ est séparable.

e) Si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, montrer que les ouverts de $X \times Y$ appartiennent à $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$.

f) En déduire que, si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, alors $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y = \mathscr{B}_{X\times Y}$.
Cas particulier : $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

Solution (PM). Nous supposons $X \neq \emptyset$. Fixons $x_0 \in X$. Notons que les ouverts, et donc en particuliers les boules ouvertes, sont boréliens, donc mesurables pour μ et ν.

I.

a) Nous allons montrer un peu plus que ce qui est demandé : X est l'union d'une suite d'*ouverts* de mesure finie (nous en aurons besoin dans la question h)). En effet, nous avons $X = \cup_{n\geq 1} B(x_0, n)$, avec $B(x_0, n)$ *ouverte,* et $\mu(B(x_0, n)) < \infty, \forall\, n$. En particulier, μ est σ-finie ; de même pour ν.

b) Soit $x_1 \in U$ (x_1 existe, car U est non-vide). Soient $r_0, r_1 > 0$ tels que $B(x_1, r_1) \subset U \subset B(x_0, r_0)$. (L'existence de r_1 suit de l'hypothèse U ouvert, celle de r_0 de l'hypothèse U borné.) De par la monotonie des mesures et les hypothèses sur μ, nous avons

$$0 < \mu(B(x_1, r_1)) \leq \mu(U) \leq \mu(B(x_0, r_0)) < \infty,$$

d'où la conclusion. De même pour ν.

c) La fonction distance $d : X \times X \to \mathbb{R}$ étant continue, V est un ouvert, car :
   1. $V = d^{-1}(]-\infty, r[) \cap (U \times U)$;
   2. $]-\infty, r[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$;
   3. $U \times U$ est un ouvert de $X \times X$ (comme produit de deux ouverts) ;
   4. l'intersection de deux ouverts est un ouvert.

d) Si $x \in X$, alors

$$\begin{aligned} V_x = \{y \in X \,;\, (x, y) \in V\} &= \{y \in X \,;\, (x, y) \in U \times U \text{ et } d(x, y) < r\} \\ &= \begin{cases} U \cap B(x, r), & \text{si } x \in U \\ \emptyset, & \text{si } x \notin U \end{cases}. \end{aligned}$$

C'est à ce stade (et dans la question suivante) que nous utilisons l'hypothèse (10). L'ensemble V appartient à $\mathscr{B}_{X\times X}$ donc, grâce à (10), à $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X$. La mesure ν étant σ-finie, le théorème 8.9 implique que la fonction

$$X \ni x \mapsto \nu(V_x) = \begin{cases} \nu(U \cap B(x, r)), & \text{si } x \in U \\ 0, & \text{si } x \notin U \end{cases}$$

est borélienne, d'où la conclusion (en utilisant le fait que U est borélien, et la définition 3.10).

e) De la question précédente et la définition 6.14, les deux intégrales de l'énoncé existent, et valent $\displaystyle\int_X \nu(V_x)\,d\mu(x)$, respectivement $\displaystyle\int_X \mu(V^y)\,d\nu(y)$. μ et ν étant σ-finies et V étant borélien, l'égalité des deux intégrales (et le fait qu'elles valent $\mu\otimes\nu(V)$) suit du corollaire 8.13.

f) Examinons par exemple la première égalité. Si $U = X$, alors $\nu(U\cap B(x,r)) = \nu(X) = h(r)$, $\forall\, x\in U, \forall\, r>0$, et dans ce cas nous avons

$$\frac{1}{h(r)}\int_U (\nu(U\cap B(x,r)))\ d\mu(x) = \frac{1}{h(r)}\int_U h(r)\,d\mu(x) = \mu(U),\ \forall\, r>0,$$

d'où la conclusion.

Supposons $U\neq X$, et posons, pour $\varepsilon>0$,

$$U_\varepsilon := \{x\in X\,;\, \mathrm{dist}(x,U^c)>\varepsilon\}.$$

Rappelons (propriétés vues en topologie) que U_ε est un ouvert (quel que soit U) et que, si U est un ouvert, alors $U_\varepsilon \nearrow U$ quand $\varepsilon\searrow 0$. En particulier, la fonction $]0,\infty[\ni\varepsilon\mapsto\mu(U_\varepsilon)$ est décroissante, et a donc une limite en 0.

Comme chaque U_ε est borélien, ce qui précède et le théorème de la suite croissante donnent

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\mu(U_\varepsilon) = \mu(U).$$

(Raisonner le long d'une suite $\varepsilon_n\searrow 0$.)

Notons les implications suivantes :

$$x\in U_\varepsilon \implies B(x,\varepsilon)\subset U \implies U\cap B(x,\varepsilon) = B(x,\varepsilon). \tag{11}$$

La deuxième implication est claire. La première suit de

$$\begin{aligned}[x\in U_\varepsilon,\ y\in B(x,\varepsilon)] &\implies \mathrm{dist}(y,U^c)\geq \mathrm{dist}(x,U^x)-d(x,y)>\varepsilon-d(x,y)>0\\ &\implies y\notin U^c\,;\end{aligned}$$

nous avons utilisé le fait que $\mathrm{dist}(\cdot,U^c)$ est 1-lipschitzienne, et le fait que

$$U^c = \{z\in X\,;\,\mathrm{dist}(z,U^c)=0\}$$

(car U^c est fermé).

Par ailleurs, nous avons (en utilisant la monotonie de l'intégrale des intégrandes boréliennes positives, le fait que U_r est borélien et (11))

$$\frac{1}{h(r)}\int_U (\nu(U\cap B(x,r)))\ d\mu(x) \leq \frac{1}{h(r)}\int_U (\nu(B(x,r)))\ d\mu(x) = \mu(U),$$

respectivement

$$\begin{aligned}\frac{1}{h(r)}\int_U (\nu(U\cap B(x,r)))\ d\mu(x) &\geq \frac{1}{h(r)}\int_{U_r} (\nu(U\cap B(x,r)))\ d\mu(x)\\ &= \frac{1}{h(r)}\int_{U_r} (\nu(B(x,r)))\ d\mu(x) = \mu(U_r).\end{aligned}$$

La conclusion suit de ce qui précède et du théorème des gendarmes.

g) Notons qu'il existe au moins un U comme dans l'énoncé : par exemple $U := B(x_0, 1)$.
Des deux questions précédentes, nous avons

$$\frac{\mu(U)}{\nu(U)} = \lim_{r\to 0+} \frac{g(r)}{h(r)} \frac{\displaystyle\int_U \nu(U \cap B(x,r))\, d\mu(x)}{\displaystyle\int_U \mu(U \cap B(x,r))\, d\nu(x)} = \lim_{r\to 0+} \frac{g(r)}{h(r)}.$$

Il s'ensuit :

1. que la limite $C := \lim_{r\to 0+} \dfrac{g(r)}{h(r)}$ existe ;
2. que $0 < C < \infty$;
3. que nous avons l'identité $\mu(U) = C\,\nu(U)$, pour tout U comme dans l'énoncé.

h) L'égalité $\mu(B) = C\,\nu(B)$, $\forall\, B \in \mathscr{B}_X$, s'obtient en combinant le fait que X est l'union d'une suite d'ouverts de mesure finie (voir la réponse à a)), le théorème 4.25 c) (et plus spécifiquement, la deuxième égalité dans (4.2)) et le point précédent.

i) Il suffit de montrer que ν_n est uniformément répartie, et d'utiliser ce qui précède.
Nous avons, pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$,

$$\nu_n(B(x,r)) = \nu_n(x + B(0,r)) = \nu_n(B(0,r))\,;$$

nous avons respectivement utilisé le fait que la distance provient d'une norme, et l'invariance par translations de la mesure de Lebesgue.
Ainsi, il suffit de montrer que $0 < \nu_n(B(0,r)) < \infty$, $\forall\, r > 0$. Soient $0 < r_0 < r_1 < \infty$ tels que $]-r_0, r_0[^n \subset B(0,r) \subset]-r_1, r_1[^n$. (L'existence de r_0, r_1 suit de l'équivalence des normes $\| \,\|$ et $\| \,\|_\infty$, et de la forme des boules pour $\| \,\|_\infty$.) Par monotonie de la mesure, nous avons

$$0 < (2r_0)^n = \nu_n(]-r_0, r_0[^n) \le \nu_n(B(0,r)) \le \nu_n(]-r_1, r_1[^n) = (2r_1)^n < \infty,$$

d'où la conclusion.

II.

a) Il suffit de reprendre la preuve de « $\subset$ » dans la proposition 8.3, en remplaçant $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ par X et Y.

b) $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable (exercice 1.14 a)) et dense dans $\mathbb{R}^n$ (propriété vue en topologie), d'où la conclusion.

c) Nous reprenons essentiellement la preuve de la proposition 2.16 c). L'inclusion « $\supset$ » est claire. Soit $x \in U$. U étant ouvert, il existe $R > 0$ tel que $B(x,R) \subset U$. En diminuant si nécessaire R, nous pouvons supposer que $R \in \mathbb{Q}$.
A étant dense, il existe $a \in A$ tel que $d(x,a) < R/2$. Soit $r := R/2 \in \mathbb{Q}$. Nous avons $x \in B(a,r)$ (car $d(x,a) < r$) et

$$B(a,r) \subset B(x, r + d(x,a)) \subset B(x,R) \subset X.$$

Ceci donne « $\subset$ ».

d) Soient $A \subset X$ et $B \subset Y$ a. p. d. et denses (dans X, respectivement Y). Alors $A \times B$ est a. p. d. (proposition 1.13 c)). Par ailleurs, nous avons

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B} = X \times Y,$$

d'où la conclusion.

e) Dans cette question, nous allons considérer des boules par rapport à plusieurs distances. Par souci de clarté, nous mettons en indice la distance correspondante.
Munissons $X \times Y$ de la distance naturelle

$$D((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d(x_1, x_2),\ \delta(y_1, y_2)\},\ \forall\, x_1, x_2 \in X,\ y_1, y_2 \in Y,$$

de sorte que

$$B_D((x_1, y_1), r) = B_d(x_1, r) \times B_\delta(y_1, r),\ \forall\, x_1 \in X,\ y_1 \in Y,\ r > 0.$$

De la question c), nous avons, pour tout V ouvert de $X \times Y$,

$$V = \bigcup_{\substack{(a,b)\in A\times B, r\in\mathbb{Q} \\ B_D((a,b),r)\subset V}} = \bigcup_{\substack{(a,b)\in A\times B, r\in\mathbb{Q} \\ B_D((a,b),r)\subset V}} B_d(a, r) \times B_\delta(b, r) \in \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y\,;$$

ici, nous avons utilisé le fait que $B_d(a, r) \in \mathscr{B}_X$ (respectivement $B_\delta(b, r) \in \mathscr{B}_Y$), d'où $B_d(a, r) \times B_\delta(b, r) \in \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$, et également le fait que l'union que nous considérons est a. p. d. (via la proposition 1.13 c) et a), car $A \times B$ est a. p. d., $\mathbb{Q}$ est dénombrable).

f) Il s'ensuit de la question précédente que

$$\mathscr{B}_{X\times Y} = \mathscr{T}(\{V\,;\ V \subset X \times Y \text{ ouvert}\}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y) = \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y.$$

La question a) permet de conclure. □

Exercice # 12. (Dérivée de l'intégrale) Nous travaillons dans $([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \nu_1)$. Soit $f \in \mathscr{L}^1$. Soit $F(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\, dt$, $\forall\, x \geq 0$.
Soit $g \in C([0, \infty[)$.

a) Montrer que $[0, \infty[\ni x \mapsto h(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} g(t) f(x - t)\, dt$ est continue.
Indication : on pourra utiliser un changement de variable.

b) Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x g(t) F(x - t)\, dt$ est de classe C^1, de dérivée h.
Indication : on pourra partir de la définition de la dérivée, et considérer le taux d'accroissement

$$\frac{\displaystyle\int_0^{x+\varepsilon} g(t) F(x + \varepsilon - t)\, dt - \int_0^x g(t) F(x - t)\, dt}{\varepsilon},\ \varepsilon \neq 0,\ h > -x.$$

Solution (PM). Notons que f et g sont boréliennes et que les fonctions caractéristiques des intervalles sont boréliennes. Il s'ensuit que toutes les fonctions considérées ci-dessous ($(x, t) \mapsto f(x-t)$, $t \mapsto g(t)$, etc.) le sont, par application des propositions de la section 3.2.

a) Considérons le changement de variable affine $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi(u) := x - u$. Notons les égalités suivantes, au sens du théorème du changement de variables :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(t) f(x - t) \chi_{[0,x]}(t)\, d\nu_1(t) = \int_{\mathbb{R}} g(x - u) f(u) \chi_{[0,x]}(x - u)\, d\nu_1(u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x - u) f(u) \chi_{[0,x]}(u)\, d\nu_1(u). \end{aligned}$$

Nous allons utiliser la dernière intégrale pour montrer la continuité de h, et en particulier pour montrer *a posteriori* que l'intégrale qui définit h existe et est finie. Pour ce faire, nous reprenons la preuve de l'exercice 9 b).

Soient $(x_n), x \subset [0, \infty[$ tels que $x_n \to x$. Soit $k_n(u) := g(x-u)f(u)\chi_{[0,x_n]}(u)$, $k(u) := g(x-u)f(u)\chi_{[0,x]}(u)$, $\forall\, u \in \mathbb{R}$, qui sont des fonctions boréliennes (voir le début de l'exercice).
Nous avons $k_n(u) \to k(u), \forall\, u \in \mathbb{R} \setminus \{x\}$, donc $k_n \to k$ ν_1-p. p. Par ailleurs, nous avons la majoration

$$|k_n(u)| \le |f|\chi_{[0,\infty[} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}).$$

(Et de même pour k. Au passage, cette majoration montre que h est bien définie.)
Le théorème 7.10 implique la continuité de h.

b) F est continue (exercice 9 b)). Il s'ensuit que la fonction de l'énoncé est bien définie et nous avons (proposition 6.42)

$$\int_0^x g(t)F(x-t)\,dt = \int_{[0,x]} g(t)F(x-t)\,d\nu_1(t) = \int_{[0,x]} g(t) \int_{[0,x-t]} f(s)\,d\nu_1(s)\,d\nu_1(t). \tag{12}$$

Nous allons exprimer le membre de droite de (12) via la fonction $x \mapsto G(x) := \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$, en utilisant le théorème de Fubini. Considérons l'ensemble

$$E := \{(s,t)\,;\, 0 \le t \le x,\ 0 \le s \le x-t\} \subset [0,x]^2,$$

qui est fermé, donc borélien.
La fonction

$$E \ni (s,t) \mapsto g(t)f(s)$$

est borélienne.
Nous avons (en utilisant la monotonie de l'intégrale des fonctions boréliennes positives, la continuité de g, et le théorème de Tonelli local pour $\nu_2 = \nu_1 \otimes \nu_1$)

$$\begin{aligned}\int_E |g(t)f(s)|\,dsdt &\le \int_{[0,x]^2} |g(t)f(s)|\,dsdt \le \max_{[0,x]} |g| \int_{[0,x]^2} |f(s)|\,dsdt\\ &= x \max_{[0,x]} |g| \int_{[0,x]} |f| < \infty.\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini local donne

$$\begin{aligned}\int_{[0,x]} g(t) \int_{[0,x-t]} f(s)\,d\nu_1(s)\,d\nu_1(t) &= \int_{[0,x]} \int_{E^t} g(t)f(s)\,d\nu_1(s)\,d\nu_1(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{E^t} g(t)f(s)\,d\nu_1(s)\,d\nu_1(t)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{E_s} g(t)f(s)\,d\nu_1(t)\,d\nu_1(s)\\ &= \int_{[0,x]} f(s) \int_{E_s} g(t)\,d\nu_1(t)\,d\lambda_1(s)\\ &= \int_{[0,x]} f(s) \int_{[0,x-s]} g(t)\,d\nu_1(t)\,d\lambda_1(s)\\ &= \int_{[0,x]} f(s)G(x-s)\,d\lambda_1(s)\\ &= \int_{[0,x]} f(s)G(x-s)\,d\nu_1(s)\end{aligned}$$

(l'avant dernière ligne utilisant la proposition 6.42, et la dernière le fait que l'intégrande est borélienne).

Posons

$$H(x) := \int_{[0,x]} f(s)G(x-s)\,d\nu_1(s),\ \forall\, x \geq 0.$$

De ce qui précède et de la preuve de a), pour conclure il suffit de montrer que H est dérivable et que

$$H'(x) = h(x) = \int_{[0,x]} f(s)g(x-s)\,d\nu_1(s),\ \forall\, x \geq 0.$$

Cette égalité revient à

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{H(x+\varepsilon)-H(x)}{\varepsilon} = h(x),\ \forall\, x \geq 0,$$

ou encore

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{H(x+\varepsilon)-H(x)-\varepsilon h(x)}{\varepsilon} = 0. \tag{13}$$

Soit ε tel que $-x < \varepsilon \leq 1$ et $\varepsilon \neq 0$. Nous allons estimer le numérateur de (13). Considérons le cas où $\varepsilon > 0$; le cas où $\varepsilon < 0$ est similaire. Nous avons, en utilisant la relation de Chasles (proposition 6.35 b)), la finitude des intégrales considérées et le fait que les intervalles sont boréliens :

$$\begin{aligned} H(x+\varepsilon)-H(x)-\varepsilon h(x) =& \int_{]x,x+\varepsilon]} f(s)G(x+\varepsilon-s)\,d\nu_1(s) \\ &+ \int_{[0,x]} f(s)(G(x+\varepsilon-s)-G(x-s)-\varepsilon g(x-s))\,d\nu_1(s) \\ :=& I(\varepsilon)+J(\varepsilon). \end{aligned}$$

Nous allons montrer que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{I(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ et $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{J(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$ (d'où la conclusion de l'exercice).

Estimation de $I(\varepsilon)$. Soit $M := \max_{[0,x+1]} |g| < \infty$. Nous avons $|G(y)| \leq My$, $\forall\, 0 \leq y \leq x+1$. Il s'ensuit que

$$|G(x+\varepsilon-s)| \leq M(x+\varepsilon-s) \leq M\varepsilon,\ \forall\, 0 < \varepsilon \leq 1,\ \forall\, s \in]x, x+\varepsilon],$$

d'où (par inégalité triangulaire et l'intégrabilité de f)

$$|I(\varepsilon)| \leq M\varepsilon \int_{]x,x+\varepsilon]} |f(s)|\,d\nu_1(s).$$

En appliquant l'exercice 9 b) à la fonction $|f|$, nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{]x,x+\varepsilon]} |f(s)|\,d\nu_1(s) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{[0,x+\varepsilon]} |f(s)|\,d\nu_1(s) - \int_{[0,x]} |f(s)|\,d\nu_1(s)\right) = 0.$$

Il s'ensuit que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{I(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$.

Estimation de $J(\varepsilon)$. Le théorème de Lagrange donne l'existence d'un point intermédiaire $\xi \in]x-s, x+\varepsilon-s[$ (dépendant de x, ε, s) tel que

$$G(x+\varepsilon-s)-G(x-s) = \int_{x-s}^{x+\varepsilon-s} g(t)\,dt = \varepsilon g(\xi).$$

Il s'ensuit que, pour $0 < \varepsilon \leq 1$ et $0 \leq s \leq x$, nous avons

$$\begin{aligned}|G(x+\varepsilon-s) - G(x-s) - \varepsilon g(x-s)| &\leq \varepsilon |g(\xi) - g(x-s)| \\ &\leq \varepsilon \max\{|g(u)-g(v)|\,;\, 0 \leq u, v \leq x+1,\, |u-v| \leq \varepsilon\} \\ &:= \varepsilon M(\varepsilon).\end{aligned}$$

Via l'inégalité triangulaire et l'intégrabilité de f, nous obtenons

$$|J(\varepsilon)| \leq \varepsilon M(\varepsilon) \int_{[0,\infty[} |f|\, d\nu_1.$$

De la continuité uniforme de g sur $[0, x+1]$, nous avons $\lim_{\varepsilon\to 0} M(\varepsilon) = 0$, d'où $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$. $\square$

Exercice # 13. (Théorème d'Orlicz) Soit $I \subset \mathbb{R}$ une intervalle ouvert non vide muni de la mesure de Lebesgue. Nous considérons une suite $(e_k)_{k\geq 0} \subset L^2 = L^2(I)$ orthonormée et telle que

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, e_k)\, e_k, \ \forall\, f \in L^2. \tag{14}$$

a) Montrer que, pour tout f, il existe une suite extraite (N_ℓ) (qui en principe dépend de f) telle que

$$\sum_{k=0}^{N_\ell} (f, e_k)\, e_k \to f \text{ p. p. quand } \ell \to \infty.$$

b) En déduire que, pour tout $f \in L^2$, nous avons

$$[f(x)]^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} [(f, e_k)]^2 \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(x)]^2 = \|f\|^2_{L^2(I)} \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(x)]^2 \text{ pour presque tout } x \in I. \tag{15}$$

c) En prenant, dans (15), $f := \chi_A$, avec A convenable, en déduire le *théorème d'Orlicz* : pour presque tout $x \in I$ nous avons $\sum_k [e_k(x)]^2 = \infty$.
Indication : commencer par l'ensemble

$$B_j := \left\{ x \in I\,;\, \sum_k [e_k(x)]^2 \leq j \right\},\ j \in \mathbb{N}^*,$$

et utiliser l'exercice # 47 de la feuille #2 pour construire A.

Solution (PM). Remarque préliminaire. C'est un énoncé typique pour les espaces L^p : il faut traduire les hypothèses et les conclusions en termes de fonctions, et se convaincre qu'elles ne dépendent pas du choix du représentant dans la classe. Nous ne vérifierons pas ce point dans ce qui suit, mais il est instructif de vérifier par exemple que la propriété (15), si vérifiée par une fonction f et une suite $(e_k)_{k\geq 0}$ de $\mathscr{L}^2(I)$, alors elle est également vérifiée par $g \sim f$ et $f_k \sim e_k$.

Dans ce qui suit, nous allons donc travailler avec des fonctions de $\mathscr{L}^2(I)$.

a) L'hypothèse (14) est

$$\sum_{k=0}^{N} (f, e_k)\, e_k \to f \text{ dans } \mathscr{L}^2(I) \text{ quand } N \to \infty.$$

La conclusion suit alors du corollaire 10.28.

b) Soit $C \in \mathscr{B}_I$ tel que $\nu_1(C) = 0$ et $\sum_{k=0}^{N_\ell}(f, e_k)\, e_k(x) \to f(x), \forall\, x \in I \setminus C$.
Pour tout $x \in I$ et tout ℓ, nous avons

$$\left|\sum_{k=0}^{N_\ell}(f, e_k)\, e_k(x)\right|^2 \le \sum_{k=0}^{N_\ell}[(f, e_k)]^2 \sum_{k=0}^{N_\ell}[e_k(x)]^2 \le \sum_{k=0}^{\infty}[(f, e_k)]^2 \sum_{k=0}^{\infty}[e_k(x)]^2.$$

Nous obtenons l'inégalité demandée en prenant, dans ce qui précède, $x \in I \setminus C$, et en faisant $\ell \to \infty$.
Pour l'égalité, notons que la suite $(e_k)_{k \ge 0}$ est orthonormée. Nous avons donc

$$\sum_{k=0}^{\infty}[(f, e_k)]^2 = \lim_{\ell \to \infty} \sum_{k=0}^{N_\ell}[(f, e_k)]^2 = \lim_{\ell \to \infty} \left\|\sum_{k=0}^{N_\ell}(f, e_k)\, e_k\right\|_{L^2(I)}^2 = \|f\|_{L^2(I)}^2.$$

c) Si $A \in \mathscr{B}_I$ et $\nu_1(A) < \infty$, alors $f := \chi_A$ est borélienne et $\|f\|_{L^2}^2 = \nu_1(A) < \infty$, et donc $f \in \mathscr{L}^2$. Il s'ensuit que ce qui précède s'applique à f.
Soient

$$B_j := \left\{ x \in I\,;\, \sum_{k=0}^{\infty}[e_k(x)]^2 \le j \right\},\ \forall\, j \in \mathbb{N}^*,$$

et

$$B := \left\{ x \in I\,;\, \sum_{k=0}^{\infty}[e_k(x)]^2 < \infty \right\} = \cup_j B_j,$$

qui sont des boréliens (ceci suit des résultats des sections 3.2 et 3.3, et de la proposition 3.11).
La conclusion est $\nu_1(B) = 0$; pour l'obtenir, il suffit de montrer que $\nu_1(B_j) = 0, \forall\, j$. Preuve par l'absurde : supposons $\nu_1(B_j) > 0$ pour un j. Soit $\varepsilon > 0$ à fixer ultérieurement. Il existe $D \in \mathscr{B}_I$ tel que $D \subset B_j$ et $0 < \nu_1(D) < \varepsilon$ (exercice 47, feuille 2). Posons $A := D \setminus C$, de sorte que $A \in \mathscr{B}_I$, $A \subset B_j$ et $0 < \nu_1(A) = \nu_1(D) < \varepsilon$. Soit $f := \chi_A \in \mathscr{L}^2$.
De ce qui précède, pour tout $x \in A$ nous avons

$$1 = [f(x)]^2 \le \|f\|_{L^2(I)}^2 \sum_{k=0}^{\infty}[e_k(x)]^2 \le \nu_1(A) j < \varepsilon j.$$

En choisissant $0 < \varepsilon < 1/j$, nous obtenons une contradiction (car A est non-vide, et donc l'inégalité précédente est vraie pous au moins un x), ce qui achève la preuve. □

Exercice # 14. (Inégalités de Nikolski'ï)
Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous faisons l'hypothèse

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{16}$$

qui permet de considérer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f.

L'hypothèse *essentielle* est

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \ge R \tag{17}$$

(avec $0 < R < \infty$ constante arbitraire).

Sous ces hypothèses, nous nous proposons de montrer les *inégalités de Nikolskiĭ directes*

$$\|f\|_{L^r} \leq C_1 R^{n(1/p-1/r)} \, \|f\|_{L^p}, \, \forall \, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{18}$$
$$\|\partial_j f\|_{L^r} \leq C_2 R^{n(1/p-1/r)+1} \, \|f\|_{L^p}, \, \forall \, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \, \forall \, j \in [\![1, n]\!], \tag{19}$$

où C_1, C_2 sont des constantes *finies* qui peuvent dépendre de n, p et r, mais pas de f ou R. Au passage, sous les hypothèses (16) et (17), nous montrerons que $f \in C^1$.

Sous l'hypothèse *plus forte* (20),

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \text{ ou si } |\xi| \leq \frac{R}{2}, \tag{20}$$

nous avons également l'*inégalité de Nikolskiĭ inverse*, énoncée, *par souci de simplicité,* uniquement si $n = 1$:

$$\|f\|_{L^r} \leq C_3 R^{1/p-1/r-1} \, \|f'\|_{L^p}, \, \forall \, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{21}$$

où C_3 est une constante *finie* qui peut dépendre de p et r, mais pas de f ou R.

Voici la démarche proposée pour montrer (18), (19) et (21).

a) (Argument de *changement d'échelle*) En supposant l'une de trois inégalités vraie pour $R = 1$, elle est vraie pour *tout* R. Voici l'argument pour (18). Soit f une fonction vérifiant (16) et (17). Soit (avec les notations de l'exercice $\#1$ a) de la feuille $\#9$) $g := f_R$.
   - (i) Montrer que g vérifie les hypothèses (16) et (17), la dernière pour $R = 1$.
   - (ii) En appliquant (18) (supposée vraie si $R = 1$) à g, et en calculant $\|g\|_{L^r}$, respectivement $\|g\|_{L^p}$ en fonction de $\|f\|_{L^r}$, respectivement $\|f\|_{L^p}$, obtenir (18) pour f.

b) Vérifier que la même démarche est valide pour (19) et (21).

c) (Preuve de (18) si $R = 1$)
   - (i) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$.
   - (ii) Montrer qu'il existe $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\psi} = \varphi$.
   - (iii) Montrer que, de plus, $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   - (iv) Montrer que $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n), \forall \, 1 \leq q \leq \infty$.
   - (v) Soit f vérifiant (16) et (17) avec $R = 1$. Montrer que $f = f * \psi$. Indication : prendre la transformée de Fourier dans cette égalité.
   - (vi) Si $1 \leq p, q, r \leq \infty$ sont tels que $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, montrer que $\|f\|_{L^r} \leq \|\psi\|_{L^q} \, \|f\|_{L^r}$.
   - (vii) Conclure.

d) (Preuve de (19) si $R = 1$)
   - (i) Montrer successivement que $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\partial_j \psi \in L^1$, $\widehat{\partial_j \psi}(\xi) = \imath \xi_j \, \varphi(\xi)$, $\partial_j \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\partial_j \psi \in L^q(\mathbb{R}^n), \forall \, 1 \leq q \leq \infty, \forall \, j \in [\![1, n]\!]$.
   - (ii) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et que $\partial_j f = f * \partial_j \psi, \forall \, j \in [\![1, n]\!]$.
   - (iii) Conclure.

e) (Preuve de (21) si $R = 1$) D'après les questions précédentes, nous savons que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et que $f' \in L^p(\mathbb{R})$ (et, par ailleurs, que $f' \in L^1(\mathbb{R})$). Il reste à montrer (21).
   - (i) Montrer qu'il existe $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que
   $$\zeta(\xi) = \frac{1}{\imath \xi}, \, \forall \, \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1.$$
   - (ii) Montrer qu'il existe $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\eta} = \zeta$.

(iii) Montrer que $f = f' * \eta$.

(iv) Conclure, sur le modèle des questions précédentes.

Solution (PM). Nous pouvons travailler avec des fonctions (*mais attention à la question d) (ii)*). Supposons donc $f \in \mathscr{L}^1$. f étant borélienne, les fonctions f_ε le sont, par composition. Par ailleurs, $\widehat{f}$ est continue (proposition 13.1). Ceci permet de vérifier que toutes les fonctions qui interviennent ci-dessous sont boréliennes.

a) Nous établissons en parallèle (i) et (ii). Pour ce faire, montrons que

$$\|f_\varepsilon\|_{L^r} = \varepsilon^{-n(1-/r)}\|f\|_{L^r},\ \forall\,\varepsilon > 0,\ 1 \le r \le \infty. \tag{22}$$

Si $1 \le r < \infty$, cette égalité suit, via le changement linéaire de variables $x = \varepsilon y := \Phi(y)$:

$$\|f_\varepsilon\|_{L^r}^r = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\varepsilon^{nr}}|f(x/\varepsilon)|^r\,dx = \frac{1}{\varepsilon^{nr}}\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^r\varepsilon^n\,dy = \frac{1}{\varepsilon^{n(r-1)}}\|f\|_{L^r}^r.$$

Si $r = \infty$, montrons l'inégalité $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \varepsilon^{-n}\|f\|_{L^\infty}$; la preuve de l'inégalité contraire est similaire. Soit $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ tel que $\nu_n(A) = 0$ et $|f(x)| \le \|f\|_{L^\infty}$, $\forall\,x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Si $x \notin \varepsilon A$, alors, $x/\varepsilon \notin A$, et donc $|f_\varepsilon(x)| \le \varepsilon^{-n}\|f\|_{L^\infty}$. Le théorème 9.2 implique que εA est un borélien négligeable. De ce qui précède, nous avons $|f_\varepsilon| \le \varepsilon^{-n}\|f\|_{L^\infty}$ ν_n-p. p., et donc $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \varepsilon^{-n}\|f\|_{L^\infty}$.
Par ailleurs, nous avons, si $f \in \mathscr{L}^1$,

$$\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\xi),\ \forall\,\varepsilon > 0,\ \forall\,\xi \in \mathbb{R}^n, \tag{23}$$

(exercice 13.13 a) (ii)).
Soit f satisfaisant (16) et (17), et soit $\varepsilon := R$. De ce qui précède, nous avons $|\xi| \ge 1 \implies \widehat{g}(\xi) = 0$, et par ailleurs $g \in \mathscr{L}^1$ (de (22)).
L'inégalité (18) avec $R = 1$ combinée avec l'identité (22) appliquée à g donnent :

$$R^{-n(1-1/r)}\|f\|_{L^r} \le C_1 R^{-n(1-1/p)}\|f\|_{L^p},$$

ce qui donne (18) pour R quelconque.

b) Admettons la validité de (19) pour $R = 1$. Supposons que $f \in C^1$ (cette propriété sera montrée plus bas). Nous avons, par calcul direct, $\partial_j f_\varepsilon = \varepsilon^{-1}(\partial_j f)_\varepsilon$, et donc, si f vérifie (16) et (17), nous obtenons (en utilisant (22) et (19) avec $R = 1$, appliquée à $g := f_R$) :

$$R^{-1-n(1-1/r)}\|\partial_j f\|_{L^r} \le C_2 R^{-n(1-1/p)}\|f\|_{L^p},$$

ce qui implique la validité de (19) pour R quelconque.
Comme ci-dessus, de (21) avec $R = 1$, nous obtenons (rappelons que $n = 1$) :

$$R^{-(1-1/r)}\|f\|_{L^r} \le C_3 R^{-1-(1-1/p)}\|f'\|_{L^p}$$

ce qui implique la validité de (21) pour R quelconque.

c) (i) C'est une conséquence du lemme 11.20.

(ii) Notons que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$ (ceci est établi, par exemple, dans la preuve de la proposition 13.5).
Soit $\eta := \widehat{\varphi}$. Nous avons $\eta \in L^1$ (proposition 13.5). Si nous posons $\psi(\xi) := (2\pi)^{-n}\eta(-\xi)$, $\forall\,\xi \in \mathbb{R}^n$, alors $\psi \in \mathscr{L}^1$ (exercice 13.13 d) (i)) et $\widehat{\psi} = \varphi$ (corollaire 13.9).

(iii) De la proposition 13.5, nous avons $\psi \in C^\infty$. Il s'ensuit que

$$\|\psi\|_{L^\infty} = (2\pi)^{-n} \sup_\xi |\widehat{\varphi}(-\xi)| \leq (2\pi)^{-n} \|\varphi\|_{L^1} < \infty$$

(nous avons utilisé l'exercice 10.9 et la proposition 13.1 a)).

(iv) Ceci suit des deux points précédents (voir l'exercice 10.23).

(v) Nous avons $f, \psi \in L^1$, d'où (proposition 13.1. c)) :

$$\widehat{f * \psi}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\psi}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\varphi(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

car (par hypothèse (16)) $\varphi(\xi) = 1$ là où $\widehat{f}(\xi) \neq 0$. Il s'ensuit que $\widehat{f * \psi} = \widehat{f}$. Comme $f * \psi \in L^1$ (par l'inégalité de Young, théorème 11.2), il s'ensuit que $f * \psi = f$ dans L^1 (corollaire 13.8).

(vi) Ceci suit de l'inégalité de Young et de la question précédente.

(vii) Si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors nous avons

$$1 \geq 1 + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} \geq 1 - \frac{1}{p} \geq 0,$$

et donc il existe $1 \leq q \leq \infty$ tel que $\dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{p}$. De ce qui précède, (18) (avec $R = 1$) est vraie avec $C_1 := \|\psi\|_{L^q} < \infty$.

d) (i) Nous avons déjà vu que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Considérons les propriétés d'intégrabilité de $\partial_j\psi$. Soit η comme dans c) (ii). Par changement linéaire de variables $x = -y := \Phi(y)$, les propriétés de $\partial_j\psi$ se ramènent à des propriétés analogues de $\partial_j\eta$ (voir par exemple l'exercice 13.13 d)). Ainsi, il suffit de montrer que $\partial_j\eta \in \mathscr{L}^1$, $\partial_j\eta \in \mathscr{L}^\infty$ (ce qui implique, comme dans c) (iv), que $\partial_j\eta \in \mathscr{L}^q$, $\forall\, 1 \leq q \leq \infty$).

Nous avons $\varphi \in \mathscr{L}^1$ (voir le début de c) (ii)). Par ailleurs, si $\zeta(x) := |x|\varphi(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, alors $\zeta \in C_c(\mathbb{R}^n)$, et donc $\zeta \in \mathscr{L}^1$. Ainsi, φ satisfait les hypothèses de la proposition 13.4, et donc

$$\partial_j\eta(\xi) = \partial_j\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\zeta_j}(\xi),\ \forall\, j = 1, \ldots, n,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

où $\zeta_j(x) := -\imath x_j\varphi(x)$.

Comme, d'une part, nous avons $\zeta_j \in \mathscr{L}^1$ (ceci est établi dans la preuve de la proposition 13.4), nous obtenons, grâce à la proposition 13.1 a), que $\partial_j\eta \in \mathscr{L}^\infty$. Par ailleurs, nous avons $\zeta_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, et donc $\partial_j\eta \in \mathscr{L}^1$ (proposition 13.5).

Enfin, comme $\psi \in \mathscr{L}^1$ et $\partial_j\psi \in \mathscr{L}^1$, $\forall\, j = 1 \ldots, n$, la proposition 13.4 et le point c) (ii) donnent

$$\widehat{\partial_j\psi}(\xi) = \imath\xi_j\widehat{\psi}(\xi) = \imath\xi_j\varphi(\xi),\ \forall\, j = 1, \ldots, n,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) *Là, il y a une subtilité. L'énoncé demande de trouver, dans la classe de f, une fonction de classe C^1.* Nous allons montrer que cette propriété est satisfaite par $f * \psi$. Cette fonction est définie en tout point et continue (théorème 11.2 c) et proposition 11.21 combinés avec le fait que $\psi \in \mathscr{L}^\infty$). L'appartenance de $f * \psi$ à la classe de f suit de c) (v). Dans tout ce qui suit, nous remplaçons f par $f * \psi$.

Comme ci-dessus, les fonctions $f * \partial_j\psi$ sont définies en tout point, continues et bornées.

Dans l'esprit de la proposition 11.7, nous allons montrer que

$$\partial_j f = \partial_j(f * \psi) = f * (\partial_j\psi). \tag{24}$$

En admettant cette égalité, de ce qui précède nous avons à la fois $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et la conclusion du (ii).

Pour vérifier (24), nous utilisons le théorème 7.18 appliqué à l'intégrale à paramètres

$$f * \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x-y)\,dy.$$

Les hypothèses de mesurabilité et dérivabilité étant immédiates (car f est continue et ψ est C^∞), procédons aux majorations.
Nous avons

$$|f(y)\psi(x-y)| \leq \|\psi\|_{L^\infty}|f(y)|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Cette majorante est intégrable, car $f \in \mathscr{L}^1$ et $\psi \in \mathscr{L}^\infty$.
De même, nous avons

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j} f(y)\psi(x-y)\right| \leq \|\partial_j\psi\|_{L^\infty}|f(y)|,\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Ceci permet d'appliquer le théorème 7.18 et de conclure.

(iii) On conclut comme dans c) (vi)–(vii), en utilisant : l'identité d) (ii), l'inégalité de Young, le fait que $\partial_j\psi \in \mathscr{L}^q$, $\forall\, q$, et l'existence de q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$.

e) (i) Soit $\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ telle que $\lambda(\xi) = 1, \forall\, 1/2 \leq |\xi| \leq 1$ (l'existence de λ suit du lemme 11.20), prolongée avec la valeur 0 en 0. Alors $\zeta(\xi) := \dfrac{1}{\imath\xi}\lambda(\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}$, convient. En effet, nous avons clairement $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Par ailleurs, $\zeta = 0$ dans un voisinage ouvert convenable de 0, et donc $\zeta \in C^\infty$ au voisinage de 0.

(ii) Comme dans c) (ii). *Attention, ce n'est pas le même η que dans les questions précédentes.*

(iii) Comme expliqué dans c) (v), il suffit de montrer que nous avons égalité des transformées de Fourier respectives. En utilisant $f, f' \in \mathscr{L}^1$, $\eta \in \mathscr{L}^1$, e) (ii) et les propositions 13.1 c) et 13.4, nous obtenons

$$\widehat{f' * \eta}(\xi) = \widehat{f'}(\xi)\widehat{\eta}(\xi) = \imath\xi\widehat{f}(\xi)\zeta(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

car, grâce à l'hypothèse (20) (avec $R = 1$) et à e) (i), nous avons $\imath\xi\zeta(\xi) = 1$ là où $\widehat{f}(\xi) \neq 0$.

(iv) Comme dans les autres questions, nous avons $\eta \in \mathscr{L}^q$, $\forall\, q$, ce qui permet de conclure, grâce à e) (iii) et à l'inégalité de Young. $\square$