Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle | Parcours Mathématiques générales

Résumés des cours
– semestre de printemps 2023 –

$\boxed{\text{A}}$ **Cours du 20 janvier.** Espaces L^p

(a) Définition 10.1.
(b) Définition 10.2.
(c) Remarque 10.3.
(d) Notation 10.4.
(e) Remarque 10.5.
(f) Travail individuel : vérifier les affirmations faites dans la Remarque 10.6.
(g) Exercice 10.13 a).
(h) À lire : Remarque 10.15.
(i) Définition 10.16.
(j) Théorème 10.17 (inégalité de Hölder).
(k) Théorème 10.25 (inégalité de Minkowski) dans le cas $1 < p < \infty$.
(l) Travail individuel : vérifier la validité de l'inégalité de Minkowski si $p = 1$ ou $p = \infty$.

$\boxed{\text{B}}$ **Cours du 27 janvier.** Espaces L^p. Convolution

(a) Corollaire 10.26.
(b) Théorème 10.27 (théorème de Fatou).
(c) Corollaire 10.28.
(d) Proposition 10.29.
(e) Définition 11.1.
(f) Travail individuel : Exercice 11.3.
(g) Théorème 11.2 (inégalité de Young) – énoncé.
(h) Théorème 11.2 c), preuve.

$\boxed{\text{C}}$ **Cours du 3 février.** Convolution

(a) Théorème 11. 2 : preuve si $p = 1$ ou $q = 1$.

(b) À lire : la preuve si $1 < p, r, r < \infty$.

(c) Définition 11.5. (L'existence des noyaux régularisants est admise.)

(d) Définition 11.6.

(e) Proposition 11.7 (avec preuve pour les dérivées partielles du premier ordre).

(f) Complément de la preuve de la proposition 11.7 : si $\varphi(x) = 0, \forall x \notin \overline{B}(0, M)$, et si $x \in \overline{B}(0, R)$, alors

$$f * \varphi(x) = \int_{\overline{B}(0,R+M)} f(y)\, \varphi(x-y)\, dy.$$

Ceci revient à montrer que $f(y)\,\varphi(x-y) = 0$ si $y \notin \overline{B}(0, R+M)$. Cette dernière propriété s'obtient comme suit :

$$\begin{aligned}&[y \notin \overline{B}(0, R+M),\ x \in \overline{B}(0, R)]\\ &\quad\implies \|x-y\| \geq \underbrace{\|y\|}_{>R+M} - \underbrace{\|x\|}_{\leq R} > M\\ &\quad\implies \varphi(x-y) = 0 \implies f(y)\,\varphi(x-y) = 0.\end{aligned}$$

(g) Notation 11.8.

(h) Théorème 11.9 (énoncé).

(i) À lire : énoncé 11.10.

(j) À faire : exercice 11.13.

(k) À faire : exercice 11.14.

(l) Exercice 11.15 (énoncé).

$\boxed{\text{D}}$ **Cours du 10 février.** Convolution. Espaces de Hilbert

(a) Théorème 11.9 (preuve).

(b) À lire : remarque 11.10.

(c) Lemme 11.20 (avec ébauche de preuve).

(d) À faire : compléter les détails de la preuve du lemme 11.20.

(e) Théorème 11.11.

(f) À lire : remarque 11.12.

(g) Lecture facultative avancée : définition 11.25, proposition 11.26, théorème 11.27. (Ces résultats seront repris en master.)

(h) Proposition 14.1.

(i) Définition 14.2.

(j) Exercice 14.8.

(k) Proposition 14.3.

(l) Définition 14.4.

(m) Théorème 14.5.

(n) Corollaire 14.6 (énoncé).

(o) Corollaire 14.7.

$\boxed{\text{E}}$ **Cours du 24 février.** Espaces de Hilbert

(a) Introduction de la section 14.2.

(b) Exemples d'espaces séparables et non-séparables.

(c) Théorème 14.10.

(d) Définition 14.11.

(e) Corollaire 14.12.

(f) Proposition 14.13.

$\boxed{\text{F}}$ **Cours du 10 mars.** Espaces de Hilbert. Séries de Fourier

(a) Corrigé du contrôle continu du 3 mars.

(b) Théorème 14.19.

(c) Définition 12.2.

$\boxed{\text{G}}$ **Cours du 17 mars.** Séries de Fourier

(a) Exercice 12.3 b) (énoncé).

(b) Théorème 12.4.

(c) Définition 12.6.

(d) Corollaire 12.7.

(e) Théorème 12.8.

(f) Lemme 12.9.

(g) À faire : exercice 12.10.

(h) Présentation du cadre de la section 12.3.

$\boxed{\text{H}}$ **Cours du 24 mars.** Séries de Fourier

(a) Exercice 12.16 b) (énoncé).
(b) Définition 12.17.
(c) Exercice 12. 18 (énoncé).
(d) Théorème 12.13.
(e) Définition 12.14.
(f) Théorème 12.15 (énoncé).
(g) Démonstration du théorème 12.12.

$\boxed{\text{I}}$ **Cours du 7 avril.** Séries de Fourier

(a) Démonstration du théorème 12.15.
(b) Démonstration du théorème 12.12 (reprise).
(c) Définition 12.21.
(d) Définition 12.22.
(e) Exercice 12.29 item 1 (énoncé).
(f) Théorème 12.23 (énoncé).
(g) Théorème 12.24 (énoncé).
(h) Corollaire 12.25.