

Fin de la feuille 10

e) Montrer que la suite (u_n) est une base orthonormée de $L^2(I)$.

Démonstration. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire suivant :

$$\langle u, v \rangle := \int_{-1}^1 \alpha(x)u'(x)v'(x) dx + \int_{-1}^1 a(x)u(x)v(x) dx, \quad u, v \in H_0^1(I).$$

On a d'une part (avec les notations des feuilles 9 et 10)

$$\langle u, u \rangle \geq C_1 \int_{-1}^1 u'^2(x) dx = C_1 \langle u \rangle^2 \geq C'_1 \|u\|_{H^1(I)}^2$$

et d'autre part (par inclusion continue de $H^1(I)$ dans $C(\bar{I})$)

$$\langle u, u \rangle \leq C_2 \int_{-1}^1 u'^2(x) dx + 2\|a\|_{L^1(I)} \|u\|_{L^\infty(I)}^2 \leq C_2 \langle u \rangle^2 + C'_2 \|u\|_{H^1(I)}^2 \leq (C_2 + C'_2) \|u\|_{H^1(I)}^2.$$

Il s'ensuit que la norme induite par ce produit scalaire et les normes $\| \cdot \|_{H^1(I)}$ et $\langle \cdot \rangle$ sont équivalentes dans $H_0^1(I)$. [En particulier, l'application $H_0^1(I) \ni u \mapsto Q(u)$ est continue.]

La suite (u_n) étant par construction orthonormée dans $L^2(I)$, il suffit de montrer que l'espace engendré par les u_n est dense dans $L^2(I)$. Pour ce faire, il suffit de montrer que (*) Vect $\{u_n\}$ est dense dans $H_0^1(I)$ (muni de l'une des trois normes ci-dessus). En effet, supposons cette propriété montrée : l'inclusion $H_0^1(I) \subset L^2(I)$ étant continue et $H_0^1(I)$ étant dense dans $L^2(I)$ ¹, on trouve (avec \bar{V}^X désignant l'adhérence de V dans l'espace X muni de sa norme habituelle)

$$\overline{\text{Vect } \{u_n\}}^{L^2(I)} \supset \overline{\text{Vect } \{u_n\}}^{H_0^1(I) \text{ } L^2(I)} = \overline{H_0^1(I)}^{L^2(I)} = L^2(I).$$

Retour à (*), qui équivaut à $(\text{Vect } \{u_n\})^\perp = \{0\}$ (l'orthogonal est calculé dans $H_0^1(I)$, par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Nous avons vu que

$$\langle u_n, v \rangle = \int_{-1}^1 \alpha(x)u'_n(x)v(x) dx + \int_{-1}^1 a(x)u_n(x)v(x) dx = \lambda_n \int_{-1}^1 u_n(x)v(x) dx, \quad v \in H_0^1(I).^2$$

En remarquant que $\lambda_n > 0$ (pourquoi?) on a donc $v \in (\text{Vect } \{u_n\})^\perp \implies v \perp u_n$ dans $L^2(I)$, $\forall n \implies v \in V_n$, $\forall n \implies Q(v) \geq \lambda_n \|v\|_{H^1(I)}^2$, $\forall n$. Cette dernière inégalité étant vraie pour tout n , on trouve

$$\infty > Q(v) \geq \|v\|_{H^1(I)}^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \|v\|_{H^1(I)}^2,$$

d'où $v = 0$. □

Remarque. Au passage, nous avons montré que (pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$) (u_n) est une base orthogonale de $H_0^1(I)$.

f) Proposer une formule pour la solution faible du problème (P) $\begin{cases} u \in H_0^1(I) \\ (-\alpha u')' + au = f \in L^2(I) \end{cases}$.

1. Car $H_0^1(I)$ contient $C^\infty(I)$, qui est dense dans $L^2(I)$.

2. Rappelons que, par définition de V_n , on a $\int_{-1}^1 u_n(x)v(x) dx = 0$, $\forall v \in V_n$. En particulier, on a $\int_{-1}^1 u_n(x)u_m(x) dx = 0$, $n \neq m$. Ceci montre que $\langle u_n, u_m \rangle = 0$, $n \neq m$, ou encore que (u_n) est non

Démonstration. On a $u = \sum (u, u_n)u_n$ et $f = \sum (f, u_n)u_n$ (avec (\cdot, \cdot) le produit scalaire de $L^2(I)$; les séries sont convergentes dans $L^2(I)$). Un calcul d'ingénieur donne

$$\sum (f, u_n)u_n = (-\alpha u')' + au = \sum (u, u_n)((-\alpha u_n')' + au_n) = \sum (u, u_n)\lambda_n u_n,$$

d'où $(u, u_n) = \frac{1}{\lambda_n}(f, u_n)$ et $u = \sum \frac{1}{\lambda_n}(f, u_n)u_n$. □

g) Montrer que la formule proposée donne bien la (seule) solution faible de (P) .

Démonstration. L'unicité se montre comme dans la feuille 9.

Soit $u := \sum \frac{1}{\lambda_n}(f, u_n)u_n$. La formule donnant u définit un élément de $H_0^1(I)$ si et seulement si la série $\sum \left(\frac{Q(u_n)}{\lambda_n}(f, u_n) \right)^2$ converge.³ Or, $Q(u_n) = \lambda_n$ et $\sum (f, u_n)^2 = \|f\|_{L^2(I)}^2 < \infty$.

Donc la fonction u devinée dans la question f) est bien dans $H_0^1(I)$.

Si on a (***) $\langle u, v \rangle = (f, v)$, $\forall v \in H_0^1(I)$, alors u est solution faible de (P) .

Vérification de ().** Cette égalité est vraie pour $v = u_n$. En effet, on a $\langle u, u_n \rangle = \lambda_n(u, u_n) = (f, u_n)$. Par linéarité, (***) est vraie pour $v \in \text{Vect} \{u_n\}$.

Enfin, le membre de gauche de (***) est continu pour la norme usuelle dans $H_0^1(I)$; celui de droite l'est pour la norme de $L^2(I)$, donc pour celle de $H_0^1(I)$.⁴ Il s'ensuit que (***) est vraie pour $v \in \overline{\text{Vect} \{u_n\}}^{H_0^1(I)} = H_0^1(I)$. □

Corrigé du devoir maison no 4 et de la feuille d'exercices no 11

Ici, $\lambda_n = \lambda_n(\alpha, a)$ et $u_n = u_n(\alpha, a)$ sont définis comme dans la feuille 10. Les hypothèses sur α et a sont celles de la feuille 10. S est la sphère unité de $L^2(I)$.

Exercice 1.

a) Montrer que $Q(u) = \sum \lambda_n(u, u_n)^2$, $\forall u \in H_0^1(I)$. [On pourra raisonner par densité.]

Démonstration. La suite (u_n) étant une base orthogonale dans $H_0^1(I)$, on a

$$u = \sum \frac{\langle u, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n = \sum \frac{\langle u, u_n \rangle}{Q(u_n)} u_n = \sum \frac{\langle u, u_n \rangle}{\lambda_n} u_n = \sum (u, u_n)u_n.$$
⁵

[Les séries considérées sont convergentes dans $H_0^1(I)$. La dernière égalité suit de l'équation $(-\alpha u_n')' + au_n = \lambda_n u_n$, que l'on peut récrire comme $\langle u_n, v \rangle = \lambda_n \langle u_n, v \rangle$, $\forall v \in H_0^1(I)$.]

Il suffit de montrer l'égalité (***) $Q\left(\sum_1^N (u, u_n)u_n\right) = \sum_1^N \lambda_n(u, u_n)^2$. En effet, si cette égalité est vraie, alors la continuité de Q dans $H_0^1(I)$ donne

$$Q(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q\left(\sum_1^N (u, u_n)u_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^N \lambda_n(u, u_n)^2 = \sum \lambda_n(u, u_n)^2.$$

L'identité (***) résulte de

$$Q\left(\sum_1^N (u, u_n)u_n\right) = \left\langle \sum_1^N (u, u_n)u_n, \sum_1^N (u, u_n)u_n \right\rangle = \sum_1^N (u, u_n)^2 \langle u_n, u_n \rangle = \sum_1^N \lambda_n(u, u_n)^2.$$

3. Dans un espace de Hilbert H , si (u_n) est une suite orthogonale, alors $\sum a_n u_n$ converge si et seulement si $\sum |a_n|^2 \|u_n\|^2$ converge. On applique ce résultat avec $H = H_0^1(I)$ et $\|u\| = Q(u)^{1/2}$.

4. Car l'inclusion $H_0^1(I) \subset L^2(I)$ est continue.

5. L'égalité $u = \sum (u, u_n)u_n$ dans l'espace $L^2(I)$ est vraie car (u_n) est une base orthonormée de $L^2(I)$. Comme $u \in H_0^1(I) \subset L^2(I)$, on a $u = \sum (u, u_n)u_n$ dans $L^2(I)$.

□

b) Soit V un sous espace de dimension n de $H_0^1(I)$. Montrer qu'il existe un $u \in V$ tel que $\|u\|_{L^2} = 1$ et $Q(u) \geq \lambda_n$.

Démonstration. Les questions b) à d) sont classiques lorsqu'il s'agit de calculer (et comparer) les valeurs propres d'une matrice symétrique. Ce qui suit n'est rien d'autre que l'adaptation de la preuve dans un espace de Hilbert de dimension infinie.

Soit $W_n := \overline{\text{Vect} \{u_n, u_{n+1}, \dots\}}^{H_0^1(I)}$.⁶ De la question a), on a, pour $u \in W_n$,

$$Q(u) = Q \left(\sum_{k \geq n} (u, u_k) u_k \right) = \sum_{k \geq n} \lambda_k (u, u_k)^2 \geq \lambda_n \sum_{k \geq n} (u, u_k)^2 = \lambda_n \sum_{k \geq n} (u, u_k)^2 = \lambda_n \|u\|_{L^2(I)}^2.$$

Il suffit donc de montrer que $V \cap W_n \neq \{0\}$. Pour obtenir ce résultat, commençons par noter que $U_n := \text{Vect} \{u_1, \dots, u_{n-1}\}$ est un supplémentaire de W_n de dimension $n - 1$. La conclusion $V \cap W_n \neq \{0\}$ suit alors du fait d'algèbre suivant :

Lemme. Soient U, V, W sous espaces de l'espace vectoriel E . Si U est un supplémentaire de dimension finie de W et si $\dim V > \dim U$, alors $V \cap W \neq \{0\}$.

Démonstration. Soit $P : E \rightarrow U$ la projection sur U parallèle à W . Soit R la restriction de P à V . Alors R est une application linéaire de V vers U . Comme $\dim V > \dim U$, R n'est pas injective : il existe $v \in V$, $v \neq 0$, tel que $Rv = 0$, ou encore $v \in W$. □

□

c) En déduire la formule "min-max"

$$\lambda_n = \min_{\substack{V \subset H_0^1(I) \\ \dim V = n}} \max_{u \in V \cap S} Q(u).$$

Démonstration. La question b) donne \geq . Pour obtenir \leq , on prend $V := \text{Vect} \{u_1, \dots, u_n\}$.

Si $u \in V \cap S$, alors $u = \sum_1^n (u, u_k) u_k$ et $\sum_1^n (u, u_k)^2 = 1$. On trouve

$$Q(u) = Q \left(\sum_1^n (u, u_k) u_k \right) = \sum_1^n \lambda_k (u, u_k)^2 \leq \lambda_n \sum_1^n (u, u_k)^2 = \lambda_n. \quad \square$$

d) En déduire que, si $\alpha \leq \beta$ et $a \leq b$, alors $\lambda_n(\alpha, a) \leq \lambda_n(\beta, b)$.

Démonstration. Si $Q_{\alpha,a}$, respectivement $Q_{\beta,b}$ sont les formes quadratiques associées, alors $Q_{\alpha,a} \leq Q_{\beta,b}$, d'où

$$\lambda_n(\alpha, a) = \min_{\substack{V \subset H_0^1(I) \\ \dim V = n}} \max_{u \in V \cap S} Q_{\alpha,a}(u) \leq \min_{\substack{V \subset H_0^1(I) \\ \dim V = n}} \max_{u \in V \cap S} Q_{\beta,b}(u) = \lambda_n(\beta, b). \quad \square$$

□

Exercice 2. a) Soient (μ_n) une suite strictement croissante et $(v_n) \subset H_0^1(I)$ une base orthonormée de $L^2(I)$ telles que $-(\alpha v_n)' + \alpha v_n = \mu_n v_n, \forall n$. Montrer que $\lambda_n = \mu_n$ et $u_n = \pm v_n$.

Démonstration. Remarque sur les solutions généralisées. Si $u \in H_0^1(I)$ est solution faible de $(-\alpha u)' + \alpha u = f \in L^2(I)$, alors (par définition)

$$\int_{-1}^1 \alpha(x) u'(x) v'(x) dx + \int_{-1}^1 a(x) u(x) v(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) v(x) dx, \quad v \in C_0^\infty(I).$$

⁶ On peut montrer que $W_n = \text{Vect} \{u_1, \dots, u_{n-1}\}^\perp$, l'orthogonal étant calculé dans $H_0^1(I)$ pour le produit scalaire de $L^2(I)$. Néanmoins, il est plus simple de remarquer que W_n est l'orthogonal de U_n dans $H_0^1(I)$.

On remarque aisément que les trois quantités de cette identité sont continues pour la norme de $H^1(I)$. Par densité de $C_0^\infty(I)$ dans $H_0^1(I)$, on trouve que l'égalité ci-dessus reste vraie pour tout $v \in H_0^1(I)$. Ou encore :

$$\langle u, v \rangle = (f, v), \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Retour à la question a) : on a

$$\lambda_m(u_m, v_n) = \langle u_m, v_n \rangle = \mu_n(u_n, v_m), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc, si $(u_m, v_n) \neq 0$, alors $\lambda_m = \mu_n$.

On fixe n . La suite (u_m) étant une base orthonormée de $L^2(I)$, il existe un m tel que $(u_m, v_n) \neq 0$. Ainsi, il existe un $m = m(n)$ tel que $\lambda_m = \mu_n$. L'application $\mathbb{N}^* \ni n \mapsto m(n) \in \mathbb{N}^*$ est strictement croissante (car $n_1 < n_2 \implies \mu_{n_1} < \mu_{n_2} \implies \lambda_{m(n_1)} < \lambda_{m(n_2)} \implies m(n_1) < m(n_2)$). Par ailleurs, cette application est surjective. En effet, comme précédemment, pour $m \in \mathbb{N}^*$ il existe n tel que $(u_m, v_n) \neq 0$, d'où $\lambda_m = \mu_n$, ou encore $m(n) = m$.

La seule bijection croissante de \mathbb{N}^* vers \mathbb{N}^* étant l'identité, on trouve que $\lambda_n = \mu_n$, $n \in \mathbb{N}^*$. De ce qui précède, si $m \neq n$ alors $\lambda_m \neq \mu_n$, d'où $(u_m, v_n) = 0$. On trouve (la première égalité étant au sens du $H_0^1(I)$, cf Exercice 1 a))

$$u_n = \sum_m (u_m, v_n) v_m = (u_n, v_n) v_n \quad \text{et} \quad (u_n, v_n)^2 = \|u_n\|_{L^2(I)}^2 = 1,$$

d'où $(u_n, v_n) = \pm 1$ et $u_n = \pm v_n$. □

b) Trouver λ_n et u_n si $\alpha = 1$ et $a = 0$.

Démonstration. On pose $v_n(x) := \sin\left(\frac{n\pi}{2}(x+1)\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mu_n := \frac{n^2\pi^2}{4}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (v_n) est une base orthonormée de $L^2(I)$.⁷ Par ailleurs, la suite (μ_n) est strictement croissante et $-v_n'' = \mu_n v_n$ (au sens classique, donc généralisé) et $v_n(\pm 1) = 0$. De la question précédente, on a $\lambda_n = \mu_n$ et $u_n = \pm v_n$. □

Du rab qui sert dans l'exercice qui suit. Si $\alpha = C_1 > 0$ et $a = C_2 \geq 0$, alors $\lambda_n = C_1 \frac{n^2\pi^2}{4} + C_2$.

Démonstration. Soit (v_n) la suite de la question précédente et soit $\tilde{\mu}_n := C_1\mu_n + C_2$, avec μ_n comme dans la question précédente. Clairement, v_n est solution (généralisée/classique) de $(-C_1 u')' + C_2 u = \tilde{\mu}_n u$. Par ailleurs, la suite $(\tilde{\mu}_n)$ croît strictement. On trouve $\lambda_n = \tilde{\mu}_n$. □

Exercice 3. Montrer qu'il existe $K_1, K_2 > 0$ (dépendant de α et a) telles que $K_1 n^2 \leq \lambda_n \leq K_2 n^2$.

Démonstration. On a d'une part $\alpha \geq C_1 > 0$ et $a \geq 0$, d'où $\lambda_n(\alpha, a) \geq \lambda_n(C_1, 0) = C_1 \frac{n^2\pi^2}{4}$.

On peut donc prendre $K_1 := C_1 \frac{\pi^2}{4}$.

D'autre part, on a (grâce à l'inégalité de Poincaré et à l'inclusion continue de $H^1(I)$ dans $C(\bar{I})$) $\|u\|_{L^\infty(I)}^2 \leq C \langle u \rangle^2$, $\forall u \in H_0^1(I)$, d'où

$$Q_{\alpha, a}(u) \leq C_2 \langle u \rangle^2 + \|a\|_{L^1(I)} \|u\|_{L^\infty(I)}^2 \leq Q_{C_2 + C\|a\|_{L^1(I)}, 0}(u).$$

Le principe du min-max implique

$$\lambda_n(\alpha, a) \leq \lambda_n(C_2 + C\|a\|_{L^1(I)}, 0) = (C_2 + C\|a\|_{L^1(I)}) \frac{n^2\pi^2}{4} := K_2 n^2.$$

□

⁷ Pour s'en convaincre, se ramener, par une transformation affine convenable, à une base connue de $L^2(0, 1)$.