Mathématiques Générales première année
Introduction aux équations aux dérivées partielles
Année 2010-2011

Devoir no 3
Semigroupe de la chaleur. Equations des ondes 1d
A rendre le 21 mars 2011

1. Semigroupe de la chaleur

a) On pose, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$:
   - $P(x) = \dfrac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-\dfrac{|x|^2}{4}}$
   - $\Phi_t := P_{\sqrt{t}}$; c'est le noyau de la chaleur.

   On pose, pour $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $S(t)f := f * \Phi_t$.

b) Montrer que $S(t) \in \mathscr{L}(L^p, L^p)$ et que $\|S(t)\|_{\mathscr{L}(L^p,L^p)} \leq 1$.

c) Soit $X_p = \mathscr{L}(L^p, L^p)$ muni de sa norme naturelle. Montrer que
$$]0, +\infty[\ni t \mapsto S(t)$$
   est continue.

d) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que $t \mapsto S(t)$ se prolonge par continuité en $t = 0$ en posant $S(0) = I$.

e) Montrer que S est un semigroupe, au sens où $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, s, t \geq 0$.

f) On suppose $p = \infty$. Montrer que :
$$\lim_{t \to 0+} S(t)f = f \text{ dans } L^\infty \iff f \text{ est uniformément continue et bornée.}$$

2. Equation des ondes 1d

Résoudre, en utilisant la transformée de Fourier, l'équation des ondes unidimensionnelle
$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times [0, +\infty[\\ u_{|t=0} = g \\ u_{t|t=0} = h \end{cases}.$$