MG1 2011-2012

Introduction aux EDP

Corrigé du DM 1

Exo 1.

$\boxed{1.}$ $$I_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{y^2}{4\varepsilon}} f(x-y)\,dy - f(x) \underset{y \rightsquigarrow \sqrt{\varepsilon}\, y}{=}$$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} f(x-\sqrt{\varepsilon} y)\,dy - f(x) =$$

$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}}$ gaussienne d'intégrale 1

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} \left\{ f(x-\sqrt{\varepsilon} y) - f(x) \right\} dy .$$

Soit $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$ $\Longrightarrow$ $|I_\varepsilon| \leq J_\varepsilon + K_\varepsilon$, où

$$J_\varepsilon = \int_{|y|<\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} \left| f(x-\sqrt{\varepsilon} y) - f(x) \right| dy$$

$$K_\varepsilon = \int_{|y|\geq\delta} \text{—〃—}$$

On a

$$J_\varepsilon \leq \sup_{|z|\leq\sqrt{\varepsilon}\,\delta} |f(x-z)-f(x)| \underbrace{\int_{|y|<\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} dy}_{\leq 1}$$

$$\leq \sup_{|z|\leq\sqrt{\varepsilon}\,\delta} |f(x-z)-f(x)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 .$$

sous réserve que $\sqrt{\varepsilon}\,\delta \longrightarrow 0$

Par ailleurs

$$K_\varepsilon \leq \underbrace{\int_{|y|\geq\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} dy}_{\xrightarrow[\delta\to\infty]{} 0} |f(x)|$$

$$+ \underbrace{\int_{|y|\geq\delta} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-\frac{y^2}{4}} |f(x-\sqrt{\varepsilon}y)| dy}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{\frac{|x-z|}{\sqrt{\varepsilon}}\geq\delta} e^{-\frac{(x-z)^2}{4\varepsilon}} |f(z)| dz \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{\delta^2}{4}} \|f\|_{L^1}.$$

En choisissant $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (de sorte que $\begin{cases} \varepsilon\delta \to 0 \\ \delta\to\infty \end{cases}$),
on trouve $I_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. □

$\boxed{2.}$ L'intégrande $e^{-ix\xi} f(x) g(\xi)$ est intégrable,
car $|e^{-ix\xi} f(x) g(\xi)| \leq |f(x)|\,|g(\xi)|$, et

$$\iint |f(x)||g(\xi)| dx\, d\xi = \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1} < \infty.$$

On obtient la conclusion via le théorème de Fubini. □

$\boxed{3.}$ On a

$$\hat{g}(y) = \int e^{-iy\xi} g(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi} \int e^{-\varepsilon\xi^2} e^{-i(y-x)\xi} d\xi$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon}}.$$ Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi} e^{-\varepsilon\xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int e^{-\frac{(y-x)^2}{4\varepsilon}} f(y)dy. \quad (*)$$

Par convergence dominée (en utilisant la domination
$$|\hat{f}(\xi) e^{ix\xi} e^{-\varepsilon\xi^2}| \leq |\hat{f}(\xi)| \in L^1)$$ et en utilisant la question $\boxed{1}$, on trouve, par passage à la limite dans $(*)$;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{ix\xi} dx$$

$\leftarrow$ formule d'inversion de la transformée de Fourier. $\square$

$\boxed{4}$. • On montre d'abord que
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{4\varepsilon}} f(x-y)dy = f(x)$$ si $f \in L^1 \cap C(\mathbb{R}^n)$.

• Puis on établit l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}, \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

• En utilisant cette identité avec $g(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} e^{i<x,\xi>} e^{-\varepsilon|\xi|^2}$, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} \hat{f}(\xi) d\xi,$$ si $f \in C \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ et si $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Exo 2.

$\boxed{1}$ L'intégrande $e^{-|x|^2}$ étant positive, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_0^\infty \left(\int_{S(0,r)} e^{-|x|^2} d\sigma \right) dr =$$

$$\int_0^\infty e^{-r^2} |S(0,r)| \, dr = \int_0^\infty \sigma_n r^{n-1} e^{-r^2} dr.$$

Par ailleurs, le théorème de Tonnelli donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^n = \pi^{n/2}.$$

On trouve

$$\sigma_n = \frac{\pi^{n/2}}{\int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr}.$$

Le changement de variable $r^2 = t$ donne

$$\int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma(n/2),$$

d'où $\boxed{\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}}$, $\square$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int_{B(0,1)} \operatorname{div} x \, dx = \int_{B(0,1)} n \, dx = n\,\omega_n.$

Par ailleurs, le théorème flux-divergence donne

$$\int_{B(0,1)} \operatorname{div} x \, dx = \int_{S(0,1)} \underbrace{\nu \cdot x}_{= x \cdot x = 1} \, d\sigma = \sigma_n.$$

D'où $\boxed{\omega_n = \frac{\sigma_n}{n}}$. $\square$

Exo 3.

$\boxed{1}$ $$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-|x|} dx = \int_0^{\infty} e^{(-i\xi - 1)x} dx$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} e^{(-i\xi+1)x} dx = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

$\boxed{2}$ On peut donc appliquer la formule d'inversion (car $x \longmapsto e^{-|x|} \in C \cap L^1$ et $\frac{2}{1+\xi^2} \in L^1$) :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{2}{1+\xi^2} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi.$$

$\square$

$\boxed{3}$ On a

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \left| \frac{e^{ix\xi}}{e^{+(1+\xi^2)t}} \right| dt \, d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\infty} \frac{1}{e^{(1+\xi^2)t}} dt \, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = \pi < \infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Fubini :

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\left(\int_0^\infty e^{-(1+\xi^2)t}\,dt\right)d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-(1+\xi^2)t}\,d\xi\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-\xi^2 t}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} e^{-\frac{x^2}{4t}}\,dt. \qquad \square$$

$\boxed{4}$ (3) donne $\quad e^{-a|x|} = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} e^{-\frac{a^2|x|^2}{4t}}\,dt,$

$\forall a>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^n.$

Comme $x \longmapsto e^{-a|x|} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on trouve que

$$(x,t)\longmapsto t^{-1/2} e^{-t} e^{-\frac{a^2|x|^2}{4t}} \in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+^*)$$

Ceci nous permet d'utiliser le théorème de Fubini:

$$\widehat{e^{-a|x|}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} e^{-a|x|}\,dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} e^{-\frac{a^2|x|^2}{4t}} e^{-ix\cdot\xi}\,dt\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{a^2|x|^2}{4t}} e^{-ix\cdot\xi}\,dx\right)dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} e^{-\frac{t|\xi|^2}{a^2}} \frac{(4\pi t)^{n/2}}{a^n} dt =$$

$$\frac{2^n}{a^n} \pi^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty t^{\frac{n-1}{2}} e^{-\left(1+\frac{|\xi|^2}{a^2}\right) t} dt \underset{\uparrow}{=}$$

$$\left(1+\frac{|\xi|^2}{a^2}\right) t = s$$

$$\frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} a}{\left(a^2+|\xi|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n+1}{2}-1} e^{-s} ds = \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) a}{\left(a^2+|\xi|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} . \quad \square$$

$\boxed{5}$ On a trouvé $P(x,t)$ à travers la propriété

$$\mathcal{F}_x P(\cdot,t)(\xi) = e^{-|\xi| t}. \qquad (**)$$

De $\boxed{4}$, $\widehat{e^{-|\xi|t}} \in L^1$ (car $\xi \longmapsto \frac{1}{\left(a^2+|\xi|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} \sim$

$\frac{1}{|\xi|^{n+1}}$ pour $|\xi|$ grand, et $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^{n+1}} < \infty$). On peut donc appliquer la formule d'inversion:

$$e^{-|\xi| t} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i x \cdot \xi} \frac{2^n \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) t}{\left(t^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}},$$

d'où $P(x,t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \dfrac{t}{\left(t^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$ vérifie bien (**), et c'est le seul choix, par injectivité de la transformée de Fourier. $\square$