Mathématiques Générales 1e année 2011-2012
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Corrigé du partiel

Exo 1

1. f est borélienne (intégrale partielle d'une fonction continue positive). Le fait que $\int f < \infty$ suit du calcul de $\hat{f}(0)$:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\cdot\xi} \int_0^\infty e^{-t} \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt\, dx =$$

Tonnelli si $\xi = 0$. Ceci donne un résultat fini et implique

$$\iint e^{-t} \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt\, dx < \infty.$$

On peut donc appliquer le thm de Fubini

$$\int_0^\infty e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix\cdot\xi} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx \right) \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}} dt =$$

transformée de Fourier d'une gaussienne

$$\int_0^\infty e^{-t} e^{-t|\xi|^2} dt = \frac{-1}{1+|\xi|^2} e^{-t(1+|\xi|^2)} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = \frac{1}{1+|\xi|^2}.$$

Suite : $\hat{f} \in L^2$ sur un compact, car $\hat{f} \in C$. Sur $\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)} \hat{f}(\xi)^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,1)} \frac{1}{|\xi|^4} < \infty \text{ (intégrales de référence)}$$

Donc $\hat{f} \in L^2$, et on obtient

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{|x|^2+1}\right)(\xi) = \pi^{3/2} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{-3/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dt. \quad \square$$

$\boxed{2}$ Si $\hat{f} \in L^1$, on trouve

$$\int |\hat{f}|^2 = \int |\hat{f}||\hat{f}| \leq \sup |\hat{f}| \int |\hat{f}| \leq \|f\|_{L^1} \int |\hat{f}| < \infty. \ \square$$

Exo 2

$\boxed{1.}$ Soit $M>0$ tel que $f(x)=g(x)=0$ si $|x| \geq M$. Des formules explicites, on a $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ et $u(x,t)=0$ si $|x| \geq M+t$. Donc $R(T) = M+T$ convient.

$\boxed{2}$ Soit $T>0$. Pour $t \in [0,T]$, on a

$$C(t)+R(t) = \int_{B(0,M+T)} |\nabla u(x,t)|^2 \, dx.$$

Comme $u \in C^2$, on peut dériver sous le signe $\int$ et obtenir:

$$\frac{d}{dt}\left(C(t)+R(t)\right) = 2 \int_{B(0,M+T)} \left(u_{tt} u_t + \nabla_x u_t \cdot \nabla_x u\right) dx.$$

Or, $u_{tt} - \Delta_x u = 0 \,|\cdot u_t \Rightarrow \int_{B(0,M+T)} u_{tt} u_t + \int_{B(0,M+T)} \nabla_x u_t \cdot \nabla_x u = 0.$

$\square$

$\boxed{3}$ Si $n=1$, alors $C(t) = \frac{1}{4} \int \left[\left(f'(x+t)+f'(x-t)\right) + \left(g(x+t)-g(x-t)\right)\right]^2 dx$

$=$

$$= \frac{1}{4}\int \Big([f'(x+t)+g(x+t)] + [f'(x-t)-g(x-t)] \Big)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int [f'(x+t)+g(x+t)]^2 dx + \frac{1}{4}\int [f'(x-t)-g(x-t)]^2 dx$$

$$+ \frac{1}{2}\int (f'+g)(x+t)\,(f'-g)(x-t)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int [(f'+g)(y)]^2 dy + \frac{1}{4}\int [(f'-g)(y)]^2 dy$$

$$+ \frac{1}{2}\int (f'+g)(x+t)\,(f'-g)(x-t)\,dx \quad \Rightarrow$$

$$C(t) = \frac{1}{2}\int f'^2 + \frac{1}{2}\int g^2 + \frac{1}{2}\int (f'+g)(x+t)(f'-g)(x-t)\,dx,$$

et de même

$$P(t) = \frac{1}{2}\int f'^2 + \frac{1}{2}\int g^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\int (f'+g)(x+t)(f'-g)(x-t)\,dx}_{I(t)},$$

On doit donc montrer que $I(t)=0$ pour t grand. Pour ce faire, il suffit de montrer que l'intégrande s'annule.

Or : $(f'+g)(x+t)\neq 0 \Rightarrow -M\leq x+t\leq M \Rightarrow$ $-M-t\leq x-t\leq M-2t$. Donc, si $M-2t\leq -M$, alors $x-t\leq -M$, d'où $(f'-g)(x-t)=0$. Conclusion : si $M-2t\leq -M$, alors l'intégrande s'annule. Donc $T=M$ convient. $\square$

$\boxed{\text{Exo 3}}$

Soit $y\in \operatorname{supp}\varphi$. Alors

$\boxed{1}$ $|f(x)-f(y)| = \big|\, |x|\varphi(x)-|y|\varphi(y)\big| \leq \big||x|-|y|\big|\,\varphi(x)$

$+|y|\,|\varphi(x)-\varphi(y)| \leq |x-y| + |y|\,|x-y| \sup|\varphi'|$

$\leq C\,|x-y|$, où $C = 1+\max\limits_{y\in\operatorname{supp}\varphi}|y|\,\max|\varphi'|$.

De même si $x \in \text{supp}\,\varphi$.

Si $x \notin \text{supp}\,\varphi$ et $y \notin \text{supp}\,\varphi$, alors $|f(x)-f(y)|=0$. $\square$

$\boxed{2}$ $u(0,t) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2+x^2}\,|x|\,\varphi(x)\,dx$. Par convergence monotone :

$$\frac{u(0,t)-u(0,0)}{t} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{t^2+x^2}\,\varphi(x)\,dx \xrightarrow[t\downarrow 0]{} \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx = \infty, \quad \square$$

car $\varphi = 1$ sur $[-1,1]$.

$\boxed{3}$ Donc le taux $\frac{|u(0,t)-u(0,0)|}{|t|}$ n'est pas majoré. u n'est pas lipschitzienne.

$\boxed{4}$ Soit v une autre solution de (5). Par le principe de Schwartz, $u-v$ s'étend à une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$. Donc $u-v$ est localement lipschitzienne. Comme u ne l'est pas, v ne l'est pas non plus. $\square$