Mathématiques Générales première année Année 2011-2012
Introduction aux équations aux dérivées partielles

Examen du 29 juin 2012. Durée : deux heures 30

Exercice 1 On considère le problème

$$(P)\begin{cases} u_t - u_{xx} + F(u)(u_x)^2 = 0 & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Ici, $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. F et u_0 sont données, u est inconnue.
On cherche à ramener (P) à l'équation usuelle de la chaleur (qui correspond à $F \equiv 0$).
Pour ce faire, on fait le changement de fonction $u = G(v)$, avec G fonction inconnue.
a) Trouver l'équation que doit satisfaire G de sorte que v soit solution de l'équation de la chaleur

$$(C)\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0 & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Dans ce cas, qui est v_0 ?
b) Résoudre l'équation trouvée au point **a)** lorsque $F \equiv 1$.
c) Trouver une solution formelle de (P) si $F \equiv 1$.
d) Montrer que, si $a \le v_0 \le b$, alors la solution mild de (C) satisfait $a \le v \le b$.
e) Montrer que, si $F \equiv 1$ et u_0 est continue et bornée, alors (P) a une solution $u \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+) \cap C^2(\mathbb{R}\times]0,+\infty[)$.

Exercice 2 On souhaite résoudre, avec $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^+)$, l'équation d'advection sur un intervalle semi infini :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, & \forall\, t>0, \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall\, x \in \mathbb{R}^+ \end{cases}.$$

a) On suppose que $c < 0$: montrer que le problème (1) possède une solution unique dont on donnera l'expression.

b) On suppose que $c > 0$: montrer qu'il faut imposer une condition $u(0,t) = g(t)$, $\forall\, t > 0$ (où $g \in C^1$) pour que l'équation (1) possède une solution unique.

c) Montrer que cette solution est de classe C^1 si et seulement si $g(0) = u_0(0)$ et $g'(0) + cu_0'(0) = 0$.

Exercice 3 On considère l'équation de Burgers

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{u^2}{2}\right) = 0, & \forall\, t>0, \forall\, x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x), & \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

a) On suppose $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Rappeler la méthode des caractéristiques pour résoudre (2). On montrera en particulier que les courbes caractéristiques sont des *droites*. Donner une condition suffisante pour que (2) possède une solution classique sur $\mathbb{R}\times[0,+\infty[$.

b) Résoudre *explicitement* (2) lorsque $u_0(x) = x$.

c) On choisit pour condition initiale u_0 tel que $u_0(x) = 0$ si $x \le 0$, $u_0(x) = x/\alpha$ si $0 \le x \le \alpha$ et $u_0(x) = 1$ si $x \ge \alpha$. Construire la solution de (2) à l'aide des caractéristiques. Montrer que cette solution est continue et de classe C^1 par morceaux. Donner le comportement de la solution pour $\alpha \to 0$.

Dans la suite, on va s'intéresser aux solutions de (2) lorsque u_0 est constante par morceaux.

d) Rappeler la définition des solutions faibles de (2). On se donne u_g, respectivement u_d fonctions de classe C^1 sur $\{(x,t); t \geq 0, x \leq ct\}$, respectivement sur $\{(x,t); t \geq 0, x \geq ct\}$. Donner une condition pour que $u(x,t) = \begin{cases} u_g(x,t), & \text{si } x < ct \\ u_d(x,t) & \text{si } x > ct \end{cases}$ soit une solution *faible*. Y'a-t-il unicité ? Donner une condition sur u_g et u_d permettant de choisir une solution physiquement acceptable.

On se donne u_0 tel que

$$u_0(x) = \begin{cases} u_1, & \forall\, x < 0 \\ u_2, & \forall\, 0 \leq x < 1 \\ u_3, & \forall\, x \geq 1 \end{cases} .$$

e) A quelle condition a-t-on une solution continue pour $t > 0$?

f) Calculer la solution lorsque $u_1 = u_3 = 0$ et $u_2 = 1$. Tracer les caractéristiques dans le plan (x,t) et la solution à différents temps.

g) Calculer la solution lorsque $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$. Tracer les caractéristiques dans le plan (x,t) et la solution à différents temps.