

CHALEUR

$$L = \partial_t - \Delta_x \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$$

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

→ Une solution de
$$\begin{cases} Lu = 0 \text{ ds } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ u|_{t=0} = f \end{cases}$$

est
$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y, t) f(y) dy, \quad t > 0$$

→ Une solution de $Lu = F$ ds \mathbb{R}^{n+1} ²
est $u = E * F$

→ si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

→ si $F \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

Δ
2^e Green
 \Downarrow
formule moyenne
 \Downarrow
P.M.

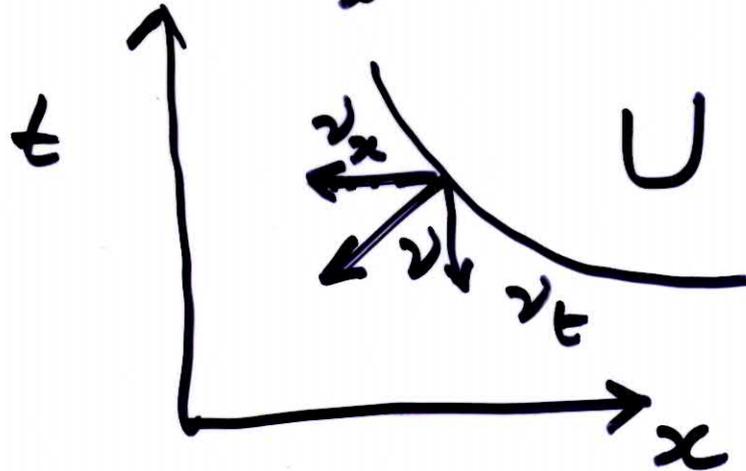
L
Goursat
 \Downarrow
formule moyenne
 \Downarrow
P.M.

Formule de Green

Hyp. $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Lipschitz
 $u, v \in C^2(\bar{U})$

Concl. $\int \underbrace{[u(\partial_t v + \Delta_x v) + v(\partial_t u - \Delta_x u)]}_A$

$$= \int_U [uv \nu_t + \left(u \frac{\partial v}{\partial x_2} - v \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)]$$



Pneure:

$$A = (uv)_t + \operatorname{div}_x (u \nabla_x v - v \nabla_x u)$$

$$= \operatorname{div}_{(x,t)} [u \nabla_x v - v \nabla_x u, uv] \Rightarrow$$

$$\int_U A \stackrel{\uparrow}{=} \int_{\partial U} (\nu_x, \nu_t) \cdot [u \nabla_x v - v \nabla_x u, uv]$$

$$= \int_{\partial U} \left[uv \nu_t + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]. \quad \square$$

Boules elliptiques, paraboliques, hyperboliques

Changements d'échelle "naturels":

$$\bullet \Delta: \quad x \xrightarrow{\vee} rx$$
$$u(x) \mapsto u(rx) = v(x)$$

$$\Delta v(x) = r^2 (\Delta u)(rx)$$

$$\Delta [u \circ v] = r^2 (\Delta u) \circ v$$

$$\text{Boules: } \{ |x| \leq 1 \} \xrightarrow{\vee} \{ |x| \leq r \}$$

L:

~~$(x, t) \mapsto (rx, rt)$~~

$(x, t) \xrightarrow{U} (rx, r^2t)$

$Lu \xrightarrow{u} v$
 $Lv(x, t) = r^2 (Lu)(rx, r^2t)$

Bonne définition de boule (adaptée à L)

$B(x, t; r) = \{ (rx, r^2t); (x, t) \in B(x, t; 1) \}$

□ :

$(x, t) \xrightarrow{V} (rx, rt)$

$B(x, t; r) = r B(x, t; 1)$

Def.

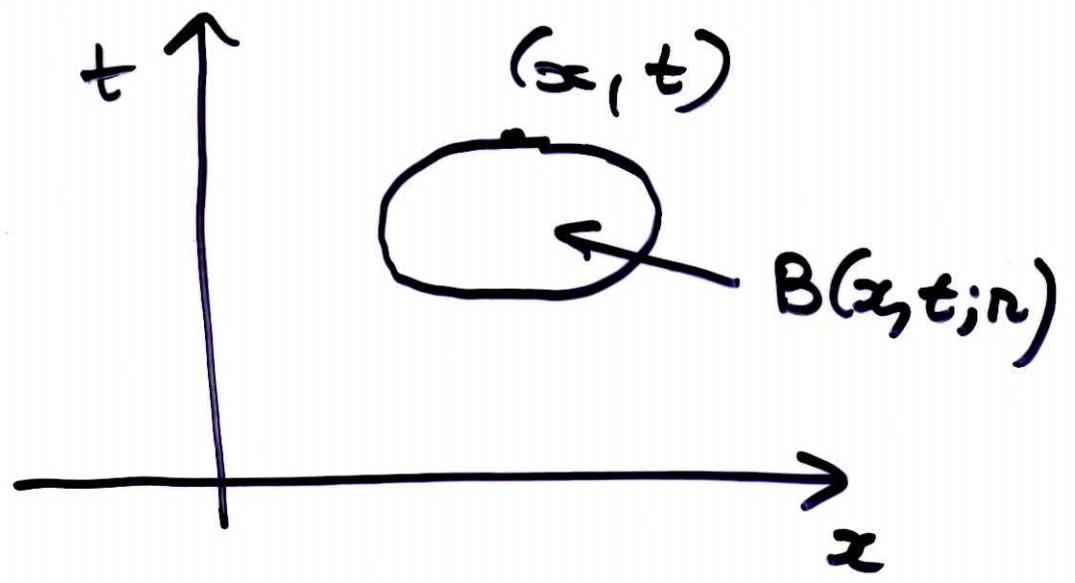
↙ boule parabolique

$$B(x, t; r) = \left\{ (y, s); s \leq t, \right.$$

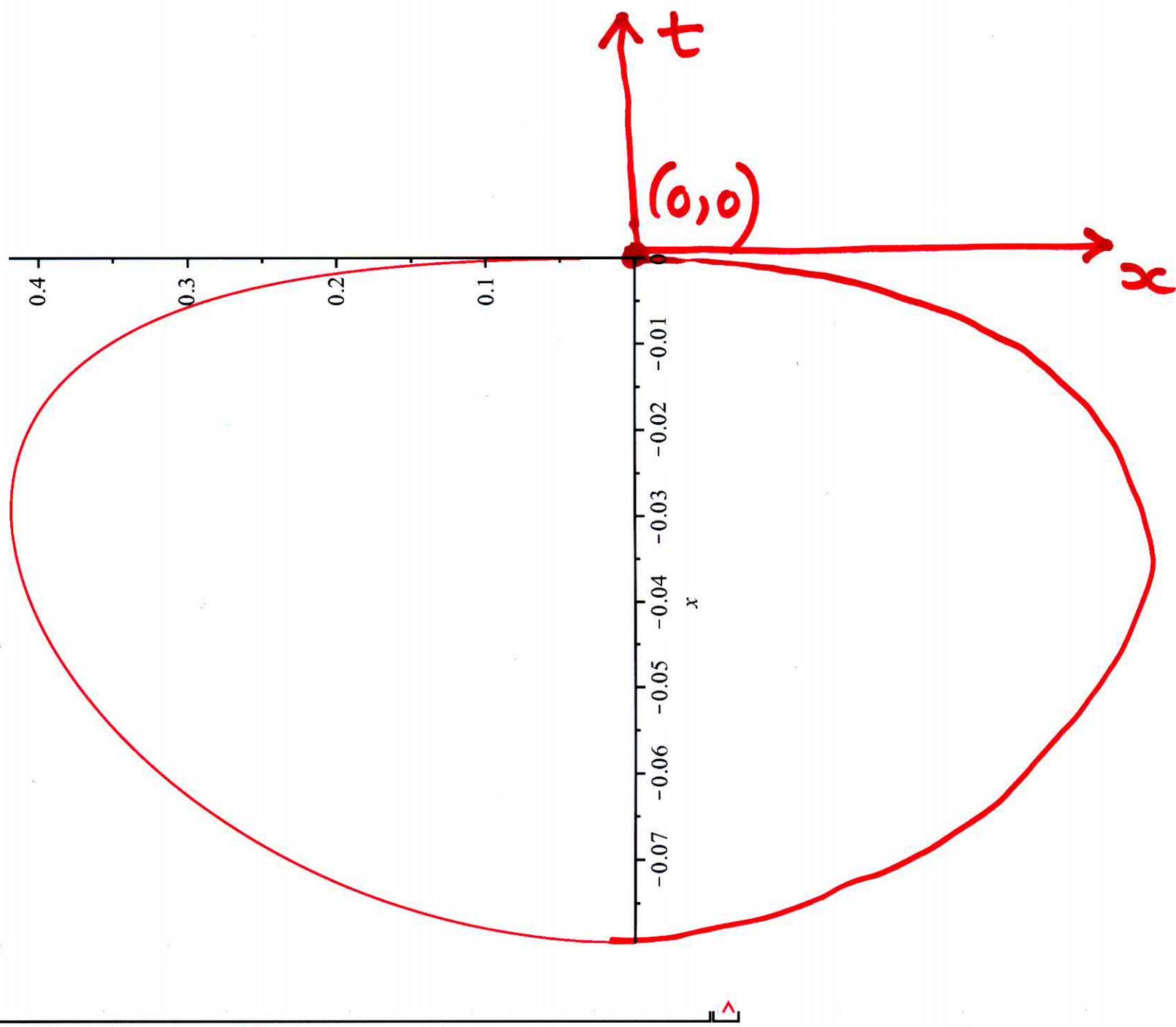
$$\left. E(x-y, t-s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

$$S(x, t; r) = \left\{ \text{---} \text{---} \text{---} \right\} = \frac{1}{r^n} \left\{ \right.$$

↖ sphère parabolique



```
> plot(sqrt(6*x*ln(-4*pi*x)), x = -1/(4*pi)..0)
```



$B(0,0;1)$ en 2D

Thm de la moyenne (Fulks, Watson)

9

Hyp. $u \in C^2(B(x, t; r))$

$f(y, s) > 0$

$$Lu = 0$$

Concl.: $u(x, t) =$

$$\frac{\int_{S(x, t; r)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y, t-s) u(y, s) d\sigma}{\int_{S(x, t; r)} \frac{\partial}{\partial \nu} E(x-y, t-s) d\sigma}$$

$$\frac{\int_{S(x, t; r)} \frac{\partial}{\partial \nu} E(x-y, t-s) f(y, s) d\sigma}{\int_{S(x, t; r)} \frac{\partial}{\partial \nu} E(x-y, t-s) d\sigma}$$

$$= \frac{\int f u}{\int f}$$

$$\in \left[\min_{S(x, t; r)} u, \max_{S(x, t; r)} u \right]$$

Concl. (cont.)
 $u(x, t) =$

$$\frac{\int_{B(x, t; R)} \frac{|y-x|^2}{(s-t)^2} g(y, s) u(y, s) dy ds}{\int_{B(x, t; R)} \frac{|y-x|^2}{(s-t)^2} dy ds}$$

10

$$\int_{B(x, t; R)} \frac{|y-x|^2}{(s-t)^2} g(y, s) dy ds$$

$g(y, s) > 0$

Corollaire.

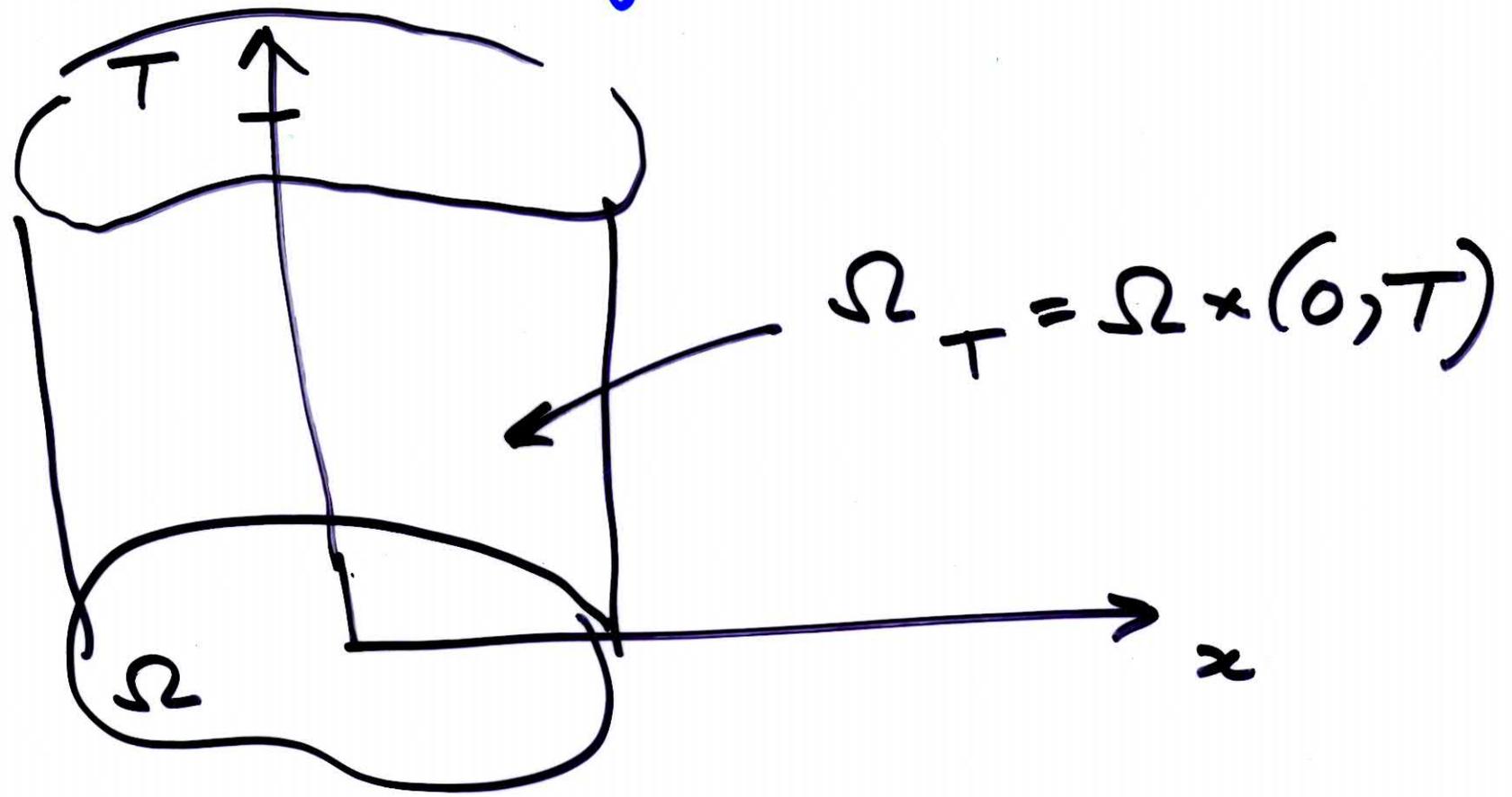
← premier pas vers le P.M.

Hyp. $u \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$
 (x, t) point d'extrémum
 $B(x, t; r) \subset U$

Concl. $u \equiv u(x, t)$
dans $B(x, t; r)$.

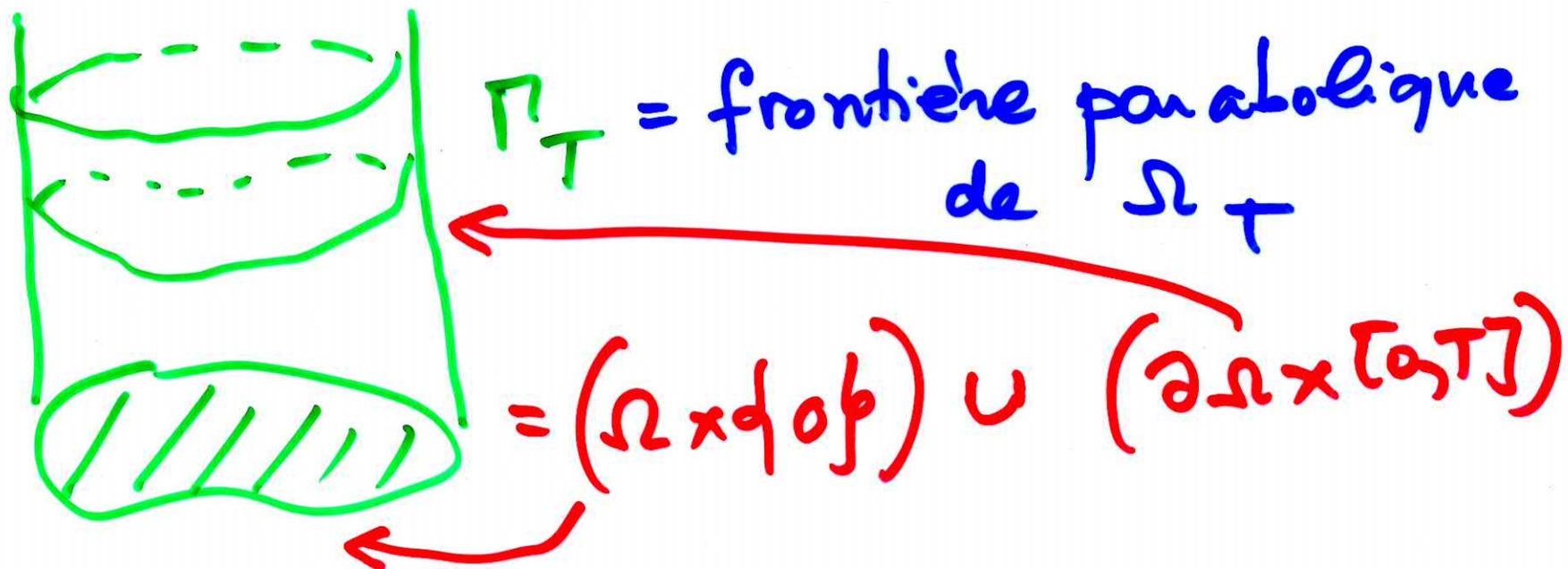
Pb de Dirichlet pour L

ou mixte : Cauchy - Dirichlet



$$(1) \begin{cases} Lu = 0 & \text{ds } \Omega \times (0, T) \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{ds } \Omega \\ u(x, t) = h(x, t), & x \in \partial\Omega, t \in [0, T] \end{cases}$$

↓
on pose des conditions sur



Principe du maximum

Hyp. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné

$$u \in C(\bar{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$$

$$Lu \leq 0 \text{ ds } \Omega_T$$

+ variantes:

$$Lu \geq 0$$

$$Lu = 0$$

Concl. $\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$

Preuve: $v_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$.

On va mg $\max_{\bar{\Omega}_S} v_\varepsilon = \max_{\Gamma_S} v_\varepsilon$.

→ Preuve: Soit (x_0, t_0) pt. de max.

de v_ε ds $\bar{\Omega}_S \Rightarrow$

(2) $t \mapsto v_\varepsilon(x_0, t)$ max en $t = t_0$

(3) $x \mapsto v_\varepsilon(x, t_0)$ max en $x = x_0$

(2) si $t_0 = 0$ Ok ✓ $(x_0, t_0) \in \Gamma_S$

Sinon: $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0$

(3) si $x_0 \in \partial\Omega$ Ok ✓

Sinon: $H_x v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0 \Rightarrow \Delta v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$

$\Rightarrow v_\varepsilon(x_0, t_0) \geq 0$

$\Omega: L v_\epsilon(x,t) = -\epsilon + L u(x,t) \leq 0 \quad \forall \epsilon$

Concl. finale

on vient de le montrer

$\max_{\overline{\Omega}_S} v_\epsilon = \lim_{\substack{S \nearrow T \\ \epsilon \searrow 0}} \max_{\Pi_S} v_\epsilon$

$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \lim_{\substack{S \nearrow T \\ \epsilon \searrow 0}}$

$= \max_{\Pi_T} u$



Principe du maximum rétrograde

Hyp. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ borné connexe

$$u \in C(\overline{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$$

essentiel

$$Lu = 0$$

(x, t) pt. de maximum de u

$$(x, t) \in \Omega_T$$

Cond. u constante sur

$$\overline{\Omega}_T$$

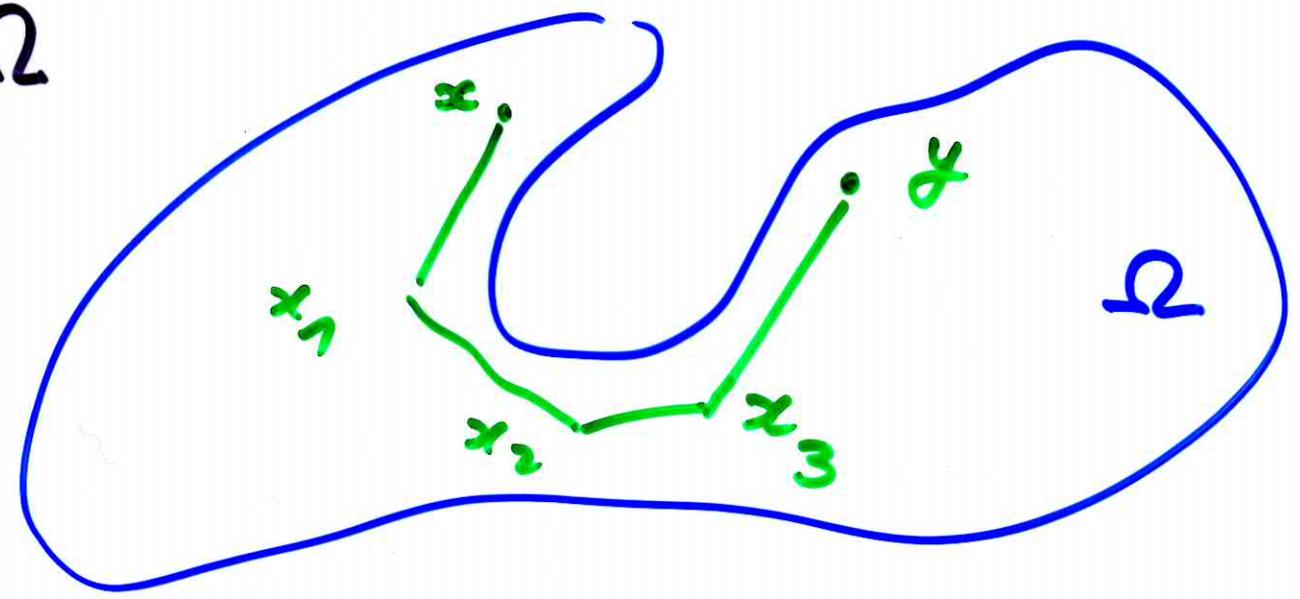
pas sur $\overline{\Omega}_T$!

Rq: faux dans $\overline{\Omega}_T$, en général (Voir poly):

Preuve

Préliminaires topologiques

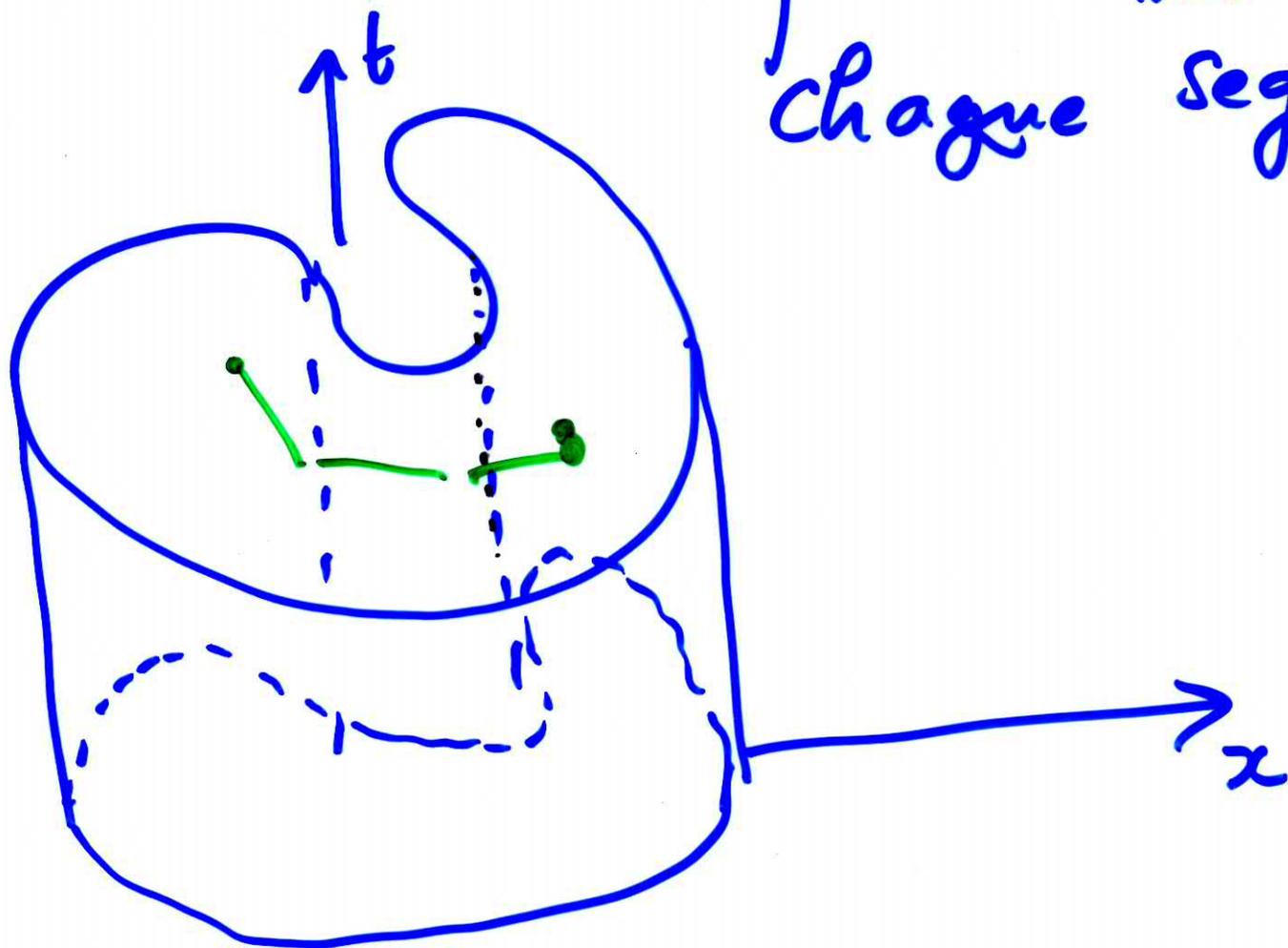
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ connexe \Rightarrow connexe par lignes polygonales:
 $\forall x, y \in \Omega, \exists [x, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, y] \subset \Omega$



\Rightarrow si $(x_0, t_0), (y, s) \in \Omega_T, s < t \Rightarrow$
 $\exists I_1, \dots, I_k$ segments descendants $\subset \Omega_T$

de (x_0, t_0) à (y, s)

$t_0 < t \downarrow$ Strictement sur
 chaque segment



On peut conclure aisément à partir de

Lemme.

(x_0, t_0) point de maximum
I segment descendant
partant de (x_0, t_0)



u cste sur I.

Preuve du lemme

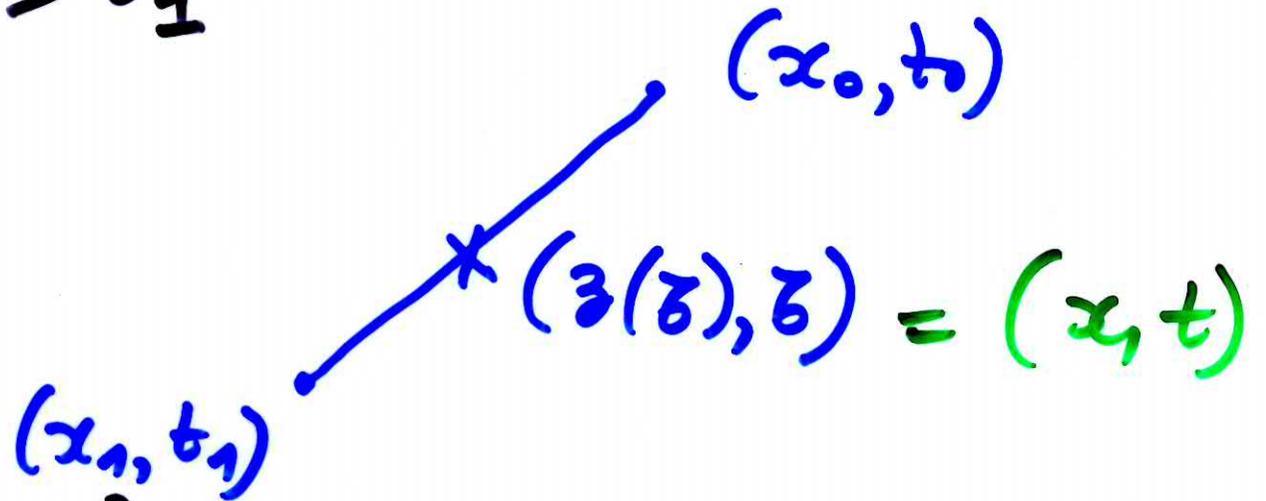
$$I = \{(z(t), t);$$

$$t \in [t_1, t_0]\}, \quad t_1 < t_0,$$

$$z(t) \in \Omega, \quad \forall t.$$

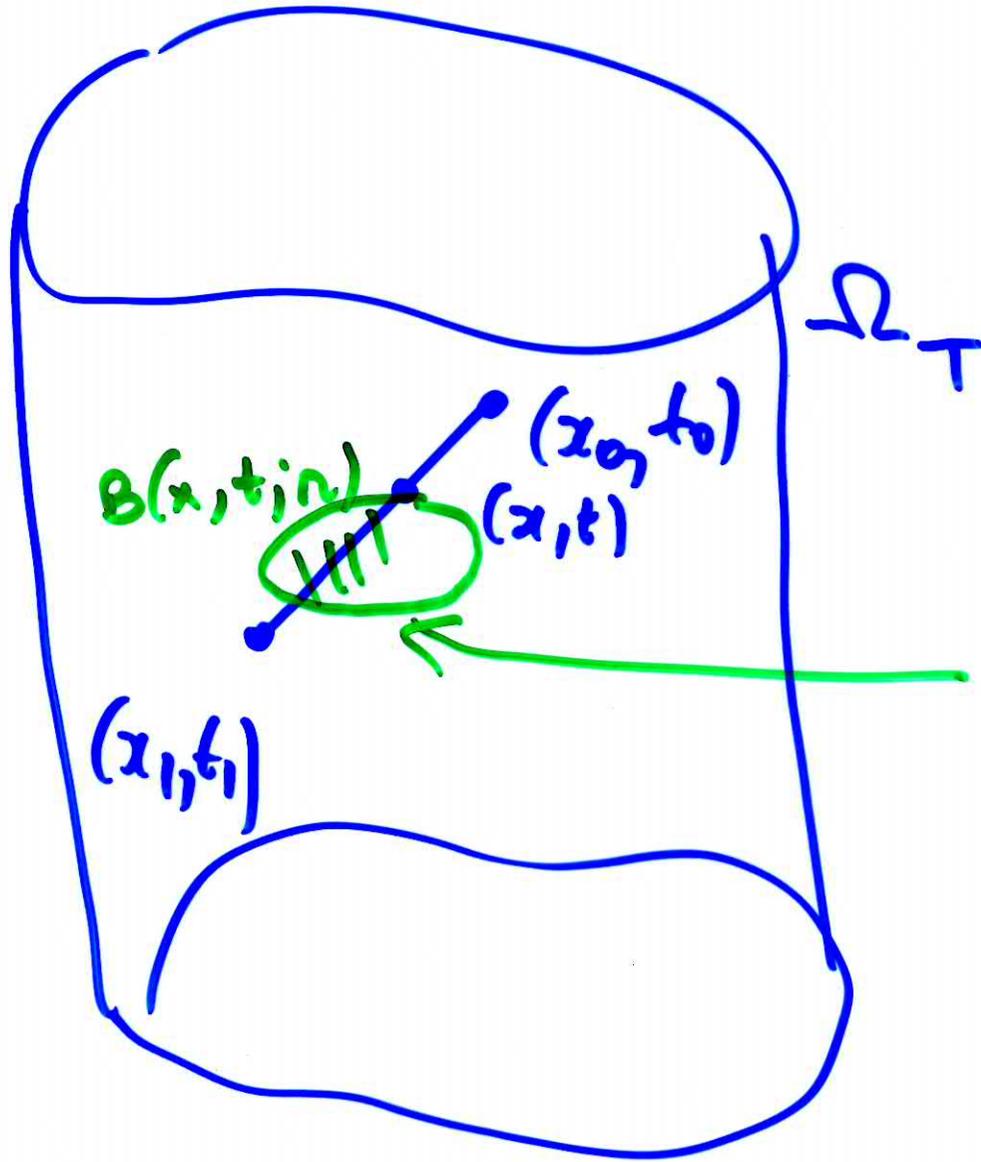
Soit $\bar{t} = \min \{t \mid u(z(s), s) \in u(x_0, t_0)\}$,
 $\forall s \geq \bar{t}$. 20
[But: $\bar{t} = t_1$].

Par l'absurde: $\bar{t} > t_1$

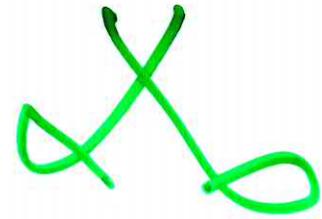


I descendant $\Rightarrow \overset{\circ}{B}(x, t; r) \cap I \neq \emptyset$,
 $\forall r > 0$.

r petit $\Rightarrow B(x, t; r) \subset \Omega_T \Rightarrow$



là $u \equiv u(x, t) = u(x_0, t_0)$



Unicité + estimation a priori pb Dirichlet

Hyp. Ω borné $\subset \mathbb{R}^n$

$$\int_{\Omega} u = f \quad ds \quad \Omega_T$$

$$u = g \quad \text{sur } \Gamma_T$$

$$u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$$

Compatibilité:

$$f \in C(\Omega_T)$$

$$g \in C(\Gamma_T)$$

Concl.: $|u| \leq \max_{\Gamma_T} |g| + T \sup_{\Omega_T} |f|.$

Preuve

$$v(x, t) := u(x, t) - \max_{\Gamma_T} |g| - t \sup_{\Omega_T} |f|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Lv \leq 0 & \text{ds } \Omega_T \\ v \leq 0 & \text{sur } \Gamma_T \end{cases} \xRightarrow{\text{P.M}} v \leq 0 \Rightarrow$$

$$(*) \quad u(x, t) \leq \max_{\Gamma_T} |g| + t \sup_{\Omega_T} |f| \leq \max_{\Gamma_T} |g| + T \sup_{\Omega_T} |f|$$

$$\text{De même : } w(x, t) := u(x, t) + \max_{\Gamma_T} |g| + t \sup_{\Omega_T} |f|$$

$$\Rightarrow w(x, t) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(**) \quad u(x, t) \geq - \max_{\Gamma_T} |g| - T \sup_{\Omega_T} |f|. \quad \square$$

Existence ?

$$(4) \quad \begin{cases} Lu = 0 & \text{ds } \Omega_T \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{ds } \Omega \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \end{cases}$$

Sol. classique: $u \in C(\bar{\Omega}_T) \cap C^2(\Omega_T)$

Condition de compatibilité:

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

Thm. (analogue parabolique du thm Poincaré)

Hyp. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lipschitz, borné
 $u_0 \in C(\bar{\Omega})$, $u_0 = 0$ sur $\partial\Omega$

Cond. \exists sol. de (3)

Outil: théorie des semi-groupes
(Hille-Yosida)

Analogie du thm de Kellogg: $u \in C^\infty \bar{\Omega}$,
 plus de régularité? \leftarrow Plus de conditions de
 compatibilité.

$$u(x, t) \equiv 0, \forall x \in \partial\Omega \Rightarrow u_t(x, t) = 0 \forall x \in \partial\Omega$$

$$\Rightarrow \Delta \mu_0(x) = 0, \forall x \in \partial\Omega$$

De même

$$(5) \quad \Delta^k \mu_0 = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad k = 1, 2, \dots$$

Thm (analogue parabolique du thm de Kellogg)

Hyp. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ C^∞ borné

$u_0 \in C^\infty(\bar{\Omega})$

u_0 satisfait (5)

Concl. $\exists u \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$ solution de (3)

Retour à la formule de la moyenne

↑ preuve détaillée en TD

Deux ingrédients:

1 formule de Gauss

2 formule de la co-aire

= combinaison Fubini + intégrales
de surface

Cas particuliers

#1

Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{y=t} f(x,y) dx \right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{y=t\}} f(x,y) d\ell \right) dt$$

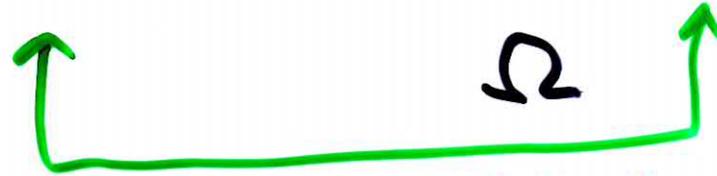
#2 Coordonnées sphériques

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^{\infty} \left(\int_{|x|=r} f(x) d\sigma(x) \right) dr$$

Thm (Formule de la co-aire)

Hyp. $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$
 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Concl.
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\{\varphi(x)=t\}} f(x) d\sigma(x) \right) dt = \int_{\Omega} f(x) |\nabla \varphi(x)| dx$$



 au sens du TCV

pour presque tout t , $\{\varphi(x)=t\}$ = hypersurface C^1
 (lemme de Sard)

Stratégie preuve formules moyenne

$$u(x,t) = \int f(y,s) u(y,s) d\sigma$$

$S(x,t;r)$

Goursat
avec $v = E$

on intègre par rapport au
rayon $\in [0, r]$
+ co-aire

$$u(x,t) = \int g(y,s) u(y,s) d\sigma$$

$B(x,t;r)$

□

Equation de la chaleur dans le
demi-espace : solutions physiques,
non physiques

bis

$$(6) \begin{cases} Lu = 0 & \text{ds } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = f \end{cases}$$

Si f raisonnable
 \Rightarrow on a
une solution

$$u(x,t) = \begin{cases} \int \varepsilon(x-y, t) f(y) dy, & t > 0 \\ f(x), & t = 0 \end{cases}$$

Unicité ?

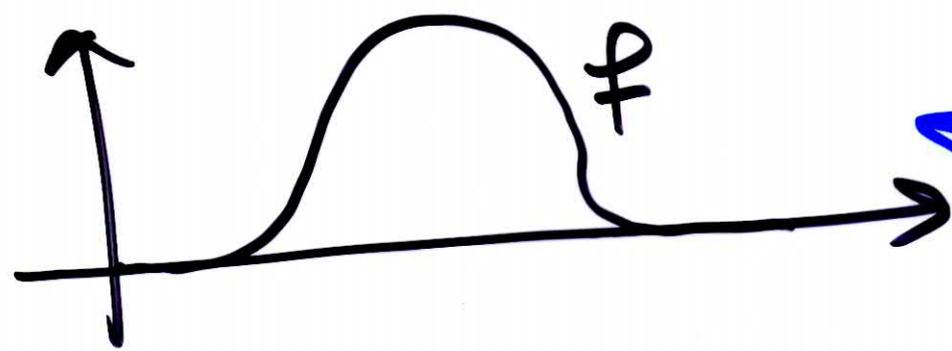
Good news : 1 de la solution raisonnable

Bad news: non

Exemple de non-unicité (Kolmogorov)

u(x,t) = sum c_j f^{(j)}(t) |x|^{2j}

avec c_j constantes convenables, f in C_c^inf(R) convenable.



détails dans le poly

Côté bonnes nouvelles:

hyp. physique

33

Thm Widder Hyp. $u \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, $u \geq 0$

$$f = u(\cdot, 0) \xRightarrow{\text{Concl.}} u(x, t) = \int E(x-y, t) f(y) dy, \quad \forall t > 0.$$

Voir forme + générale en poly

Prop. Hyp. $u \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$, u bornée

$$f = u(\cdot, 0) \xRightarrow{\text{Concl.}} u(x, t) = \int E(x-y, t) f(y) dy, \quad \forall t > 0.$$

Preuve

$$v(x, t) = \begin{cases} u(x, t) - \int E(x-y, t) f(y) dy, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

- ⇒
- $v \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$
 - $Lv = 0$ ds $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$
 - $v(x, 0) = 0$
 - **v bornée**

Lemme

Si $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$u(x, t) := \int E(x-y, t) f(y) dy, t > 0$$

$$\Rightarrow \|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Preuve du lemme

$$\bullet P := E(\cdot, 1)$$

= gaussienne

$$x \mapsto \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4}}$$

$$\Rightarrow \int P = 1$$

$$\bullet E(\cdot, t) = \frac{P}{\sqrt{t}} \Rightarrow \|E(\cdot, t)\|_{L^1} = \left\| \frac{P}{\sqrt{t}} \right\|_{L^1}$$

$$= \|P\|_{L^1} = \int P = 1.$$

• Young:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} = \|E(\cdot, t) * f\|_{L^p} = \|E_{\sqrt{t}} * f\|_{L^p}$$

$$\leq \|E_{\sqrt{t}}\|_{L^1} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p} \quad \square$$

↑ Young

Retour à la prop: on sait

$$\left\{ \begin{array}{l} Lv = 0 \text{ de } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ v|_{t=0} = 0 \\ v \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \\ v \text{ bornée} \end{array} \right.$$

On doit mg
 $v = 0$

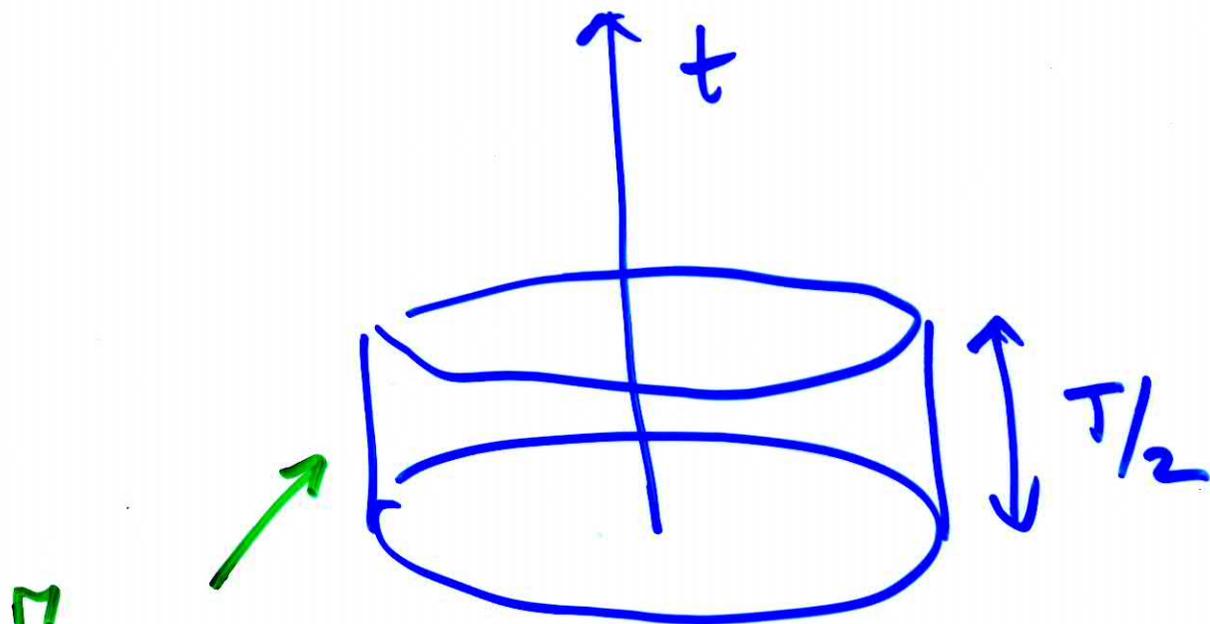
Soit $w(x, t) := \frac{1}{[4\pi(T-t)]^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(T-t)}}$

$\Rightarrow \begin{cases} Lw = 0, & x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T) \\ w(x, t) \geq \frac{1}{[2\pi T]^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2T}}, & x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, \frac{T}{2}) \end{cases}$

On fixe $\begin{cases} T \\ \delta > 0 \end{cases}$. Si $R \gg 1 \Rightarrow$

$u(x, t) \leq \delta w(x, t)$ sur le bord parabolique de \downarrow $\rightarrow \infty$ si $R \rightarrow \infty$
 \downarrow bornée

$$\Omega = B(0, R) \subseteq \mathbb{R}^n$$



$\Gamma_{T/2}$

$$\begin{cases} u - \delta w \leq 0 \\ L(u, \delta w) = 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_{T/2} \Rightarrow \text{P.M.}$$

$$u \leq \delta w \quad \text{sur } \overline{\Omega}_{T/2} = \overline{B(0, R)} \times [0, T/2]$$

$$R \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad u \leq \delta w \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \times [0, T/2]$$

$$\delta \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad u \leq 0.$$

$$T \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \text{De même, } v \geq 0$$

□

Preuve similaire \rightsquigarrow

39

Prop.

Soit u sol. de

$$(7) \begin{cases} Lu=0 & \text{ds } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = 0 \\ u \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+) \end{cases}$$

Hyp. $|u(x,t)| \leq C e^{a|x|^2}$

Concl. $u \equiv 0$.

\Rightarrow Les sol^{ns} $\neq 0$ de (7) sont sauvages
"wild"

Déf. Si f "convenable" (par ex. $f \in L^p$)

$$\Rightarrow u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t) f(y) dy, \quad t > 0$$

est la solution "mild" de $\begin{cases} Lu = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ u|_{t=0} = f. \end{cases}$
modérée

Exo Si $f \in L^p, f \geq 0, f \neq 0$ p.p. \Rightarrow

$u(x,t) > 0, \forall t > 0$

De l'équation de la chaleur est fautive!

Formule de Duhamel

vient des EDO

$$(8) \begin{cases} Lu = F(x, t) \text{ ds } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = 0 \text{ ds } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Calcul formel en Fourier \Rightarrow une solution donnée par

$$(9) u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y, t-s) F(y, s) dy ds$$

On: $\int_{\mathbb{R}^n} E(x-y, t-s) F(y, s) dy =$ la solution mild

de $\begin{cases} Lu = 0 \text{ ds } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=t_0} = F(\cdot, s) \end{cases} = \text{sol. de } \begin{cases} Lu = 0 \text{ ds } \mathbb{R}^n \times [s, \infty) \\ u|_{\tau=s} = F(\cdot, s) \end{cases}$
calculée à l'instant $t-s$. calculée à l'instant t

De: $(*) u(x, t) = \int_0^t \text{sol}^n \text{ à l'instant } t \text{ de } Lu=0 \text{ ds}$
avec $u = F(\cdot, s)$ à l'instant s

= Somme (infinie)

= c'est comme si à chaque instant s , $F(\cdot, s)$

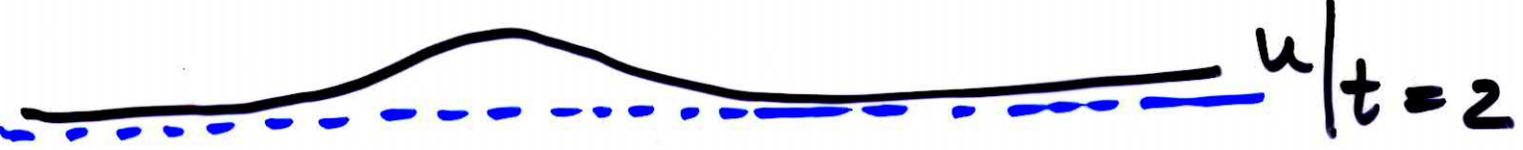
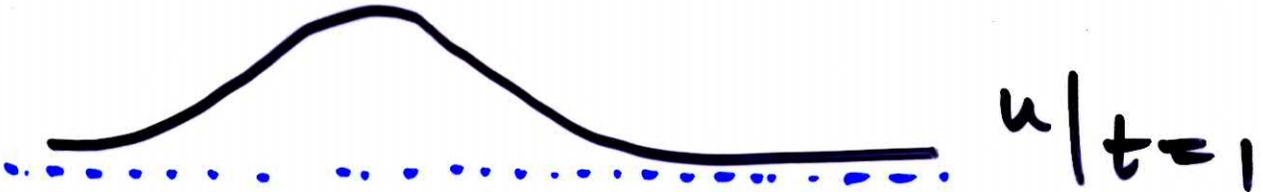
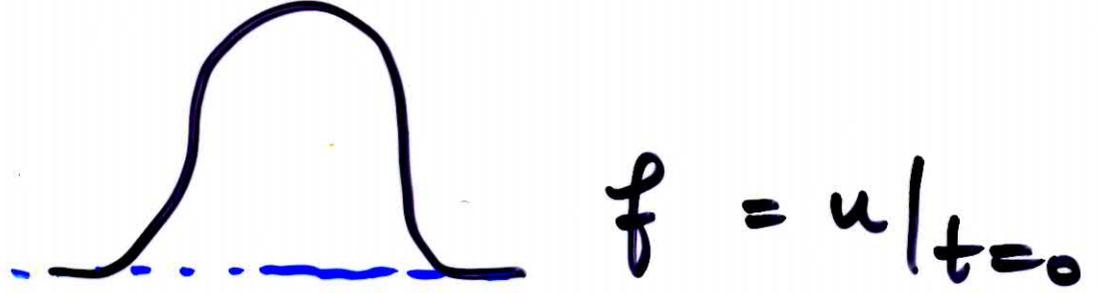
43
joue le rôle d'une condition initiale
= le principe de Duhamel

(9) donne la solⁿ mild de (8), et
C'est une solⁿ de (8) si F raisonnable
(par ex. $F \in C_b(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$).

Effets dispersifs

$$(40) \begin{cases} Lu = 0 & \text{do } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^* \\ u|_{t=0} = f & \text{do } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Dispersion:



Forme quantitative de la dispersion:

$$\|u(\cdot, t)\|_X \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

X = ?

$X = L^1$ non

Si $f \geq 0 \Rightarrow$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^1} = \int u(x, t) dx = \int f * E(\cdot, t) =$$

mild

$$= \int f \int E(\cdot, t) = \int f \Rightarrow \|u(\cdot, t)\|_{L^1} = \text{cote.}$$

$$X = L^\infty \text{ now } f = 1 \Rightarrow u(x, t) \equiv 1$$

Prop. Hyp. $1 < p < \infty$.
 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$
 u solⁿ mild de (1a)

Concl. $\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$

Preuve: Etape 1. $\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$.

Preuve: $P = E(\cdot, 1) \Rightarrow E(\cdot, t) = P_{\sqrt{t}} \Rightarrow$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} = \|P_{\sqrt{t}} * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \quad \square$$

Etape 2. OK si $n=2$, $f \in L^1 \cap L^2$
 \uparrow dc en fait si $f \in C_c^\infty$

Preuve

$$u(\cdot, t) = P_{\sqrt{t}} * f \Rightarrow$$

$$\hat{u}(\cdot, t) = \hat{P}_{\sqrt{t}} \hat{f} \Rightarrow \text{(Plancherel)}$$

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|\hat{u}(\cdot, t)\|_{L^2} =$$

$$(2\pi)^{-n/2} \|e^{-t|\xi|^2} \hat{f}(\xi)\|_{L^2} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{TCD} 0$$

$$\uparrow \in L^2 \text{ (Plancherel)}$$

□

Etape 3. Ok si $f \in L^2$

Preuve

Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists g \in L^2 \cap C_c^\infty$ tq

$$\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon \quad (\text{par ex. } g \in C_c^\infty) \Rightarrow$$

$$\|u_f(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|u_g(\cdot, t)\|_{L^2} + \|u_{f-g}(\cdot, t)\|_{L^2}$$

$$\xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

$$< \varepsilon$$

↑
solution avec
donnée f

$$\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u_f(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$$

□

49
Etape 4. OK si $1 < p < 2$

Corollaire de l'inég. de Hölder

Soient $1 \leq p_0 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty (\Rightarrow$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_2} \text{ pour un } \theta \in (0, 1)$$

$$\text{Alors } \|f\|_{L^{p_1}} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^\theta \|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}$$

Rq si $p_0 < p_1 < p_2 \Rightarrow \theta \in (0, 1)$.

Ex:

$$1 < p < 2 \Rightarrow \exists \theta \in (0, 1) \quad \forall g$$

$$\|g\|_{L^p} \leq \|g\|_{L^1}^\theta \|g\|_{L^2}^{1-\theta}, \quad \forall g.$$

Retour étape 4: il suffit de prendre $f \in C_c^\infty$ ($\Rightarrow f \in L^1 \cap L^2$).

Also:

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^1}^\theta \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^{1-\theta} \leq$$

$$\|f\|_{L^1}^\theta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \theta(-1) \rightarrow 0$$

↑ qd $t \rightarrow \infty$, par l'étape 2



Etape 5.

Ok si $2 < p < \infty$

Preuve

$f \in C_c^\infty, 2 < p < \infty \Rightarrow \exists \theta \in (0, 1)$

fg

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^\theta \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty}^{1-\theta}$$

$$\leq \|f\|_{L^\infty}^{1-\theta} o(1) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0 \quad \square$$

Autre effet dispersif

Prop

u sol. de (10)

hyp. $f \in L^p$

Concl. $|u(x, t)| \leq t^{-\frac{n}{2p}} \|f\|_{L^p}$.

Preuve

$$|u(x, t)| = |P_{\sqrt{t}} * f(x)| \leq \|P_{\sqrt{t}} * f\|_{L^\infty}$$

$$\leq \|P_{\sqrt{t}}\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} = t^{-\frac{n}{2p}} \|f\|_{L^p}. \quad \square$$

↑
Young (Hölder, ici!)

Line dans le poly:
la preuve du principe du maximum
par la méthode d'énergie