Université Lyon 1 Année 2013-2014
Master Mathématiques Générales $1^{\text{ère}}$ année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Devoir Maison 2.
Résolutions d'EDP à l'aide de la transformée de Fourier
– à rendre le 17 mars 2014 –

Exercice 1. (*Noyau de Poisson dans le demi-espace.*)

Rappelons que le noyau de Poisson $P(x,t)$ donnant "la" solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u = u_{tt} + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

s'obtient formellement à partir de l'égalité $\mathscr{F}_x P(\cdot,t)(\xi) = e^{-|\xi|t}$.

1. Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto e^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'identité
$$e^{-|x|} = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\imath x\xi}}{1+\xi^2}\,d\xi. \tag{1}$$
3. En utilisant (1) et l'identité $\dfrac{1}{1+\xi^2} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-(1+\xi^2)t}\,dt$, obtenir l'identité
$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}e^{-x^2/(4t)}\,dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$
4. En utilisant la question précédente, montrer que la transformée de Fourier de $F_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_a(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, est donnée par
$$\mathscr{F} F_a(\xi) = \frac{2^n \pi^{(n-1)/2} a}{(a^2+|\xi|^2)^{(n+1)/2}}\int_0^\infty s^{(n-1)/2}e^{-s}\,ds = \frac{2^n\pi^{(n-1)/2}\Gamma((n+1)/2)a}{(a^2+|\xi|^2)^{(n+1)/2}}.$$
5. En déduire que $P(x,t) = \dfrac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\dfrac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}$.

Exercice 2. (*Equation de Schrödinger*)

Dans la suite, on considère le problème

$$(P) \qquad \begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0 & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

i.e. le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger.

La fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est donnée et on cherche $u : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

1. *Préliminaire.* Dans cette question, on cherche à obtenir formellement la solution du problème (P). Supposons u solution. En supposant tous les calculs licites, déterminer l'équation satisfaite par $\hat{u}(t,\xi) = \mathscr{F}_x u(t,\cdot)(\xi)$ (*i.e.* à t fixé, $\xi \mapsto \hat{u}(t,\xi)$ est la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto u(t,x)$). Résoudre cette dernière équation puis donner l'expression de u.

2. *Groupe de Schrödinger*

   On pose, pour $t \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_t(x) := \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi\imath t})^n} e^{\frac{\imath|x|^2}{4t}}$; c'est le noyau de Schrödinger.

   Pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on pose $S(t)g = \Phi_t * g$. Pour $t = 0$, on définit $S(0)g = g$. Ainsi, on a une application

   $$\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}^n) \ni (t,g) \mapsto S(t)g \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

   (a) On pose, pour $t \neq 0$, $g^t(x) = \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi\imath t})^n} e^{\frac{\imath|x|^2}{4t}} g(x)$. Montrer que, pour $t \neq 0$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $S(t)g(x) = e^{\frac{\imath|x|^2}{4t}} \widehat{g^t}\left(\dfrac{x}{2t}\right)$.

   (b) Montrer que $\|S(t)g\|_{L^2} = \|g\|_{L^2}$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, g \in (L^1 \cap L^2)(\mathbb{R}^n)$.

   (c) En déduire que $S(t)$ s'étend de manière unique comme isométrie linéaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

   Pour $\varepsilon > 0$ et $t \neq 0$, on pose $\Phi_{\varepsilon,t}(x) := \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi(\varepsilon + \imath t)})^n} e^{-\frac{|x|^2}{4(\imath t + \varepsilon)}}$.

   (d) Pour $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, calculer $\widehat{\Phi_{\varepsilon,t} * g}$. Montrer que $\Phi_{\varepsilon,t} * g \to S(t)g$ simplement quand $\varepsilon \to 0+$.

   (e) En déduire l'égalité (au sens de $L^2(\mathbb{R}^n)$) suivante : $\widehat{S(t)g}(\xi) = e^{-\imath t|\xi|^2}\hat{g}(\xi)$, $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

   (f) Montrer que $S(t+s) = S(t)S(s)$, $\forall\, s,t \in \mathbb{R}$, au sens où $S(t+s)g = S(t)S(s)g$, $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

   (g) En déduire que $S(t)$ est unitaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et que $\mathbb{R} \ni t \mapsto S(t)$ est un isomorphisme de groupes.

   Cette propriété fait de $S(t)$ un groupe : c'est le groupe de Schrödinger.

   (h) Montrer que, pour $t \neq 0$, $S(t)$ est continu de $L^1(\mathbb{R}^n)$ vers $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de norme $\leq (4\pi|t|)^{-n/2}$.

3. *Solution de l'équation de Schrödinger*

   On se donne $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et on pose $u(t,\cdot) = S(t)g$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

(b) Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. On pose $\psi(t,\xi) := \mathscr{F}_x\varphi(t,\cdot)(\xi)$. Montrer que u est solution faible de (S) si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \hat{g}(\xi) e^{-\imath t|\xi|^2} \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(-\xi,t) - \imath|\xi|^2\psi(-\xi,t) \right) = 0,\ \forall\ \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n).$$

(c) En déduire que, si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, alors u est solution de (P) au sens suivant :
- u est solution faible de (S) ;
- $\lim\limits_{t\to 0} \|u(t,\cdot) - g\|_{L^2} = 0$.

(d) Montrer que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_t, L^2(\mathbb{R}_x^n))$.