Devoir maison 4 -

Exercice 1

1) a) Soit $\beta > 0$. La fonction $v \longmapsto -\beta v^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour toute donnée $v(0) \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy
$$\begin{cases} v'(t) = -\beta v(t)^2 \\ v(0) \text{ donné} \end{cases}$$

admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert contenant 0. On s'intéresse aux temps ≥ 0 ici, on note $[0, T[$ l'intervalle maximal correspondant.

b) . Si $v(0) = 0$, la solution maximale est la solution nulle (stationnaire), définie sur $[0, +\infty[$.

- Si $v(0) \neq 0$, $v(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T[$ (unicité)

et on peut écrire $\quad -\dfrac{v'(t)}{v(t)^2} = \beta \quad \forall t \in [0, T[$

d'où $\quad \dfrac{1}{v(t)} - \dfrac{1}{v(0)} = \beta t \quad \forall t \in [0, T[$

et $v(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{v(0)} + \beta t}$, $\forall t \in [0, T[$.

Ainsi, si $v(0) > 0$, v est bien défini jusqu'en $+\infty$, et si $v(0) < 0$, le dénominateur s'annule en $t = -\dfrac{1}{v(0)\beta} > 0$. Ainsi dans ce dernier cas, v défini sur $[0, T[$ avec $T = \dfrac{-1}{v(0)\beta}$.

2) a) On a $c = F'$, avec $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle qu'il existe $\alpha > 0$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $F''(x) \geq \alpha$.

Ainsi c est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $c'(x) \geq \alpha$ $\forall x \in \mathbb{R}$

c est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $c(x) = c(0) + \int_0^x c'(t)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$

d'où
$$c(x) \geq c(0) + \alpha x \quad \forall x > 0$$
$$c(x) \leq c(0) + \alpha x \quad \forall x < 0$$

et donc $\lim_{x \to \pm\infty} c(x) = \pm\infty$: c est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On en déduit que c est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

On note $g = c^{-1}$.

b) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $g'(y) = \dfrac{1}{c'(c^{-1}(y))} = \dfrac{1}{F''(c^{-1}(y))}$

donc $g'(y) \leq \dfrac{1}{\alpha}$.

3) On suppose $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $u_0' \in L^\infty(\mathbb{R})$

On suppose u solution $\mathcal{C}^2([0,T^*[\times\mathbb{R})$ de

$$(1)\begin{cases} \partial_t u + \partial_x [F(u)] = 0 \\ u(0,.) = u_0 \end{cases}$$

a) On dérive l'équation de transport par rapport à x : $\partial_x(\partial_t u) + \partial_x [F'(u)\partial_x u] = 0$

i.e. $\partial_x(\partial_t u) + F''(u)(\partial_x u)^2 + F'(u)\partial_x^2 u = 0$

Comme u est de classe $\mathcal{C}^2$ $\partial_x\partial_t u = \partial_t\partial_x u$

et donc

$$\partial_t(\partial_x u) + F'(u)\,\partial_x^2 u + F''(u)(\partial_x u)^2 = 0$$

b) On fixe $x \in \mathbb{R}$. On pose $v(t) = \partial_x u(t, X(t,x))$.

Alors $\forall t \in [0,T^*[$,

$$\frac{dv}{dt}(t) = \partial_t(\partial_x u)(t, X(t,x)) + \partial_x^2 u(t, X(t,x))\,\partial_t X(t,x)$$

On $X(t,x)$ est solution de

$$\begin{cases} \partial_t X(t,x) = F'(u(t,X(t,x))) \\ X(0,x) = x \end{cases}$$

donc
$$\frac{dv}{dt}(t) = \partial_t(\partial_x u)(t,X(t,x)) + F'(u(t,X(t,x)))\partial_x^2 u(t,X(t
$$
$$= -F''(u(t,X(t,x)))\left(\partial_x u(t,X(t,x))\right)^2$$

De plus, on sait $u(t,X(t,x)) = u_0(x)$ $\forall t \in [0,T^*[$

donc

$$(4)\begin{cases} \dfrac{dv}{dt}(t) = -F''(u_0(x))\, v(t)^2 \\ v(0) = \partial_x u(0,x) = u_0'(x) \end{cases}$$

Par le préliminaire 1, on a

$$v(t) = \frac{v(0)}{1+\beta v(0) t} \quad \text{où } v(0) = u_0'(x), \quad \beta = F''(u_0(x))$$

et donc $\beta v(0) = \dfrac{d}{dx}\left[F'(u_0)\right](x) = \dfrac{d}{dx}\left[c(u_0)\right](x)$.

. Si $v(0) \geq 0$, ce qui équivaut à $\dfrac{d}{dx}[c(u_0)](x) \geq 0$ alors $v(t)$ solution de (4) est bien définie jusqu'en $+\infty$. On note alors $T(x) = +\infty$.

. Si $v(0) < 0$, ce qui équivaut à $\dfrac{d}{dx}[c(u_0)](x) < 0$

alors v solution de (4) est définie jusqu'au temps maximal $T(x) = \dfrac{-1}{\frac{d}{dx}[c(u_0)](x)}$ (>0).

. Si $c(u_0)$ est croissante, $T(x) = +\infty$ et $T^* = +\infty$
donc v définie sur $[0, T^*[$
. Sinon, $T^* = -\dfrac{1}{\inf_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}[c(u_0)]} \leq T(x)$

donc v définie sur $[0, T^*[$.

De plus,

. si $v(0) = 0$, $v(t) = 0 \leq \dfrac{1}{\alpha t}$ $\forall t \in]0, T^*[$

. si $v(0) > 0$, $v(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{v(0)} + F''(u_0(x))t}$

$$\leq \frac{1}{F''(u_0(x))t} \leq \frac{1}{\alpha t} \quad \forall t \in]0, T^*[$$

. si $v(0) < 0$, $v(t) < 0$ $\forall t \in]0, T^*[$ (unicité 0 solution)
donc $v(t) \leq \dfrac{1}{\alpha t}$

c) On sait $\forall t \in]0, T^*[$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_x u(t, X(t,x)) \leq \frac{1}{\alpha t}.$$

Or $X(t,x) = x + t\, c(u_0(x))$ est un difféo de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ à $t \in]0, T^*[$ fixé. Ainsi

$$\partial_x u(t, y) \leq \frac{1}{\alpha t} \quad \forall t \in]0, T^*[, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

d) Soit $t \in]0, T^*[$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x > y$,

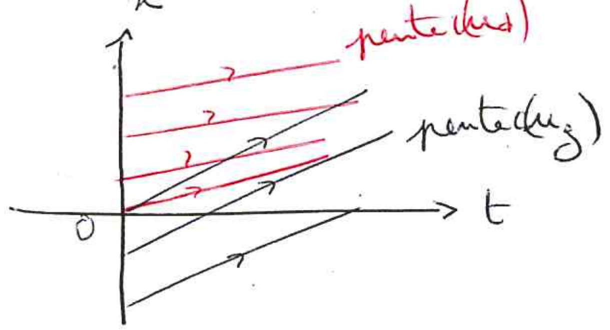
$$u(t,x) - u(t,y) = \int_y^x \partial_x u(t, \xi)\, d\xi$$

$$\leq \int_y^x \frac{1}{\alpha t}\, d\xi = \frac{1}{\alpha t}(x-y)$$

d'où le résultat avec $C(t) = \frac{1}{\alpha t}$.

4) Soit maintenant $u_0(x) = \begin{cases} u_g & x < 0 \\ u_d & x > 0 \end{cases}$

a) Supposons $u_g > u_d$. Alors les caractéristiques "s'intersectent dès $t = 0$" ($u_g > u_d$ et c croissante). On cherche une solution onde de choc



sous la forme $u(t,x) = \begin{cases} u_g & x < \sigma t \\ u_d & x > \sigma t \end{cases}$

avec σ donné par Rankine-Hugoniot :

$$\sigma = \frac{F(u_d) - F(u_g)}{u_d - u_g}$$

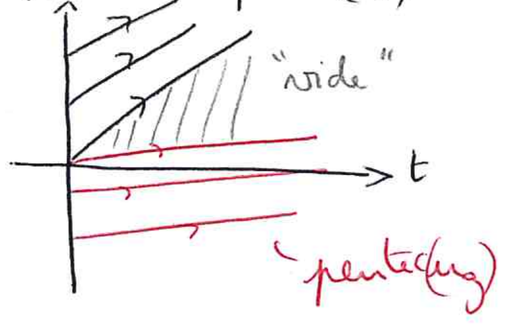
Fixons $t > 0$. Soit $x > y$.

- si $x > y > \sigma t$: $u(t,x) = u(t,y)$
- si $\sigma t > x > y$: $u(t,x) = u(t,y)$
- si $x > \sigma t > y$: $u(t,x) - u(t,y) = \underset{< 0}{u_d - u_g}$

dans tous les cas, $u(t,x) - u(t,y) \leq 0$

donc u satisfait une inégalité d'Oleinik avec $c(t) = 0$.

b) Supposons maintenant $u_g < u_d$.



La solution faible onde de choc précédente existe toujours. Mais ici, dans le cas

$x > \sigma t > y$: $u(t,x) - u(t,y) = u_d - u_g > 0$

s'il existait $c(t)$ tq $\forall x > y$

$$u(t,x) - u(t,y) \leq \frac{1}{c(t)}(x-y)$$

on aurait pour tout $x > \sigma t > y$,

$$0 < u_d - u_g \leq \frac{1}{c(t)}(x-y)$$

A la limite $\begin{cases} y \to \sigma t \\ x \to \sigma t \end{cases}$, on obtient une contradiction

c) Calculons la solution onde de détente dans ce cas : on cherche $u(t,x) = w\left(\frac{x}{t}\right)$.

Alors $\partial_t u(t,x) = -\frac{x}{t^2} w'\left(\frac{x}{t}\right)$

$$\partial_x u(t,x) = \frac{1}{t} w'\left(\frac{x}{t}\right)$$

et donc $\partial_t u(t,x) + c(u(t,x))\, \partial_x u(t,x)$

$$= \frac{1}{t}\left[-\frac{x}{t} w'\left(\frac{x}{t}\right) + c\left(w\left(\frac{x}{t}\right)\right) w'\left(\frac{x}{t}\right) \right].$$

Ainsi u solution si $\left(-\xi + c(w(\xi))\right) w'(\xi) = 0$ $\forall \xi$.

w n'est pas constant, on en déduit

$$c(w(\xi)) = \xi$$

Par le préliminaire 2, c'est un $\mathcal{C}^1$-difféo de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, d'inverse g tel que $\forall \xi \in \mathbb{R}$, $g'(\xi) \leq \frac{1}{\alpha}$

On en déduit $w(\xi) = g(\xi)$.

Ainsi
$$u(t,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < c(u_g)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & \text{si } c(u_g)t \leq x \leq c(u_d)t \\ u_d & \text{si } x > c(u_d)t \end{cases} \quad (7)$$

<u>Rq</u> on obtient cette solution en utilisant la méthode des caractéristiques là où elle permet de conclure : on sait

$$X(t,x) = \begin{cases} x + c(u_g)t & \text{si } x < 0 \\ x + c(u_d)t & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et $u(t, X(t,x)) = u_0(x) \quad \forall t, x$

Ainsi si $x < 0$ $u(t, x + c(u_g)t) = u_g$

si $x > 0$ $u(t, x + c(u_d)t) = u_d$

i.e.
$$\begin{cases} \text{si } y < c(u_g)t, & u(t,y) = u_g \\ \text{si } y > c(u_d)t, & u(t,y) = u_d \end{cases}$$

Ensuite il faut "combler le vide" i.e. trouver les valeurs de $u(t,y)$ pour $c(u_g)t \leq y \leq c(u_d)t$

ce qui est fait avec l'onde de détente.

Montrons que la solution (7) satisfait une inégalité d'Oleinik. Soit $t>0$, $x>y$ et continue $u(t,.)$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et sa dérivée vérifie

$$\partial_x u(t,\xi) = \begin{cases} 0 & \xi < c(u_g)t \\ g'\left(\frac{\xi}{t}\right)\cdot\frac{1}{t} & c(u_g)t < \xi < c(u_d)t \\ 0 & c(u_d)t < \xi \end{cases}$$

donc $\quad \partial_x u(t,\xi) \leq \dfrac{1}{\alpha t} \quad$ p.p

et $\quad u(t,x) - u(t,y) = \displaystyle\int_y^x \partial_x u(t,\xi)\,d\xi$

$\forall x>y$

$$\leq \frac{1}{\alpha t}(x-y).$$

Exercice 2

1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On multiplie $Lu = \lambda u$ par une fonction test v. Formellement,

$$\int_{-1}^{1} Lu\, v = \int_{-1}^{1} \lambda u v$$

Or $$\int_{-1}^{1} Lu\, v = \int_{-1}^{1} -\frac{d}{dx}(a(x)u'(x))\, v(x)\, dx + \int_{-1}^{1} q u v$$

$$= \int_{-1}^{1} a u' v' + \int_{-1}^{1} q u v - \left[a u' v\right]_{-1}^{1}$$

comme on veut aussi $u(-1) = u(1) = 0$, on impose les mêmes conditions sur v et alors

$$\int_{-1}^{1} Lu\, v = \int_{-1}^{1} a u' v' + q u v.$$

Ainsi, on obtient la formulation variationnelle suivante de (7) :

$$\left| \begin{array}{l} \text{trouver } u \in H_0^1(I) \text{ tq} \\ \quad \forall v \in H_0^1(I), \ \displaystyle\int_{-1}^{1} a u' v' + q u v = \lambda \int_{-1}^{1} u v. \end{array} \right.$$

2) Soit $u \in H_0^1(I)$. Alors

- $u \in L^2$, $q \in L^\infty$ donc $qu \in L^2(I) \subset \mathcal{D}'(I)$
- $u' \in L^2$, $a \in L^\infty$ donc $au' \in L^2(I) \subset \mathcal{D}'(I)$

et dans $\mathcal{D}'(I)$, on peut définir $-\frac{d}{dx}(au')$.

Ainsi $Lu = -\frac{d}{dx}(au') + qu$ a bien un sens dans $\mathcal{D}'(I)$.

3)4) Soit $u \in H_0^1(I) \setminus \{0\}$.

$$Q(u) = \int_I a(u')^2 + \int_I qu^2$$

$$\geq \int_I a(u')^2 \quad \text{car } q \geq 0$$

$$\geq \alpha \|u'\|_{L^2}^2 \geq \frac{\alpha}{C} \|u\|_{L^2}^2 \quad \text{par}$$

l'inégalité de Poincaré rappelée dans l'énoncé.

Ainsi $J(u) = \dfrac{Q(u)}{\|u\|_{L^2}^2} \geq \dfrac{\alpha}{C}$ et J est

minorée sur $H_0^1(I) \setminus \{0\}$.

On pose $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in H_0^1(I) \setminus \{0\}} J(u)$.

17

5) Soit λ une valeur propre de L sur $H_0^1(I)$,
i.e. il existe $u \in H_0^1(I)$ tq $Lu = \lambda u$
$u \neq 0$

Au sens de la formulation variationnelle :

$$\forall v \in H_0^1(I), \quad \int_I a u' v' + uv = \lambda \int_I uv$$

Avec $v = u$, $\quad Q(u) = \lambda \|u\|_{L^2}^2$

i.e. $J(u) = \lambda$.

Ainsi $\underline{\lambda \geq \lambda_1}$.

6) a) Soit (v_n) suite minimisante :
$\forall n$, $v_n \in H_0^1(I)$, $\|v_n\|_{L^2} = 1$, $J(v_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \lambda_1$

Alors $\displaystyle J(v_n) = Q(v_n) = \int_I a (v_n')^2 + q v_n^2$

$$\geq \alpha \|v_n'\|_{L^2}^2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Or $(J(v_n))$ converge donc est bornée. On en déduit que $(v_n')_n$ est bornée dans L^2.

Ainsi (v_n) est bornée dans $H_0^1(I)$.

Comme l'injection $H_0^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ est compacte (Rellich), (v_n) admet une sous-suite convergente dans $L^2(I)$, on la note encore (v_n) et on note u_1 sa limite.

b) Soit $p, n \in \mathbb{N}$. On a déjà montré

$$\alpha \|v_n' - v_p'\|_{L^2}^2 \leq Q(v_n - v_p)$$

$$\leq 2\left(\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ \lambda_1}}{Q(v_n)} + \underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ \lambda_1}}{Q(v_p)}\right) - Q(v_n + v_p) \quad \left(\begin{array}{l}\text{identité}\\ \text{du parallélogram}\end{array}\right.$$

et $Q(v_n + v_p) \geq \lambda_1 \|v_n + v_p\|_{L^2}^2$ (définition de λ_1)

On $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} u_1$ donc $\|v_n + v_p\|_{L^2} \longrightarrow \|2u_1\|$
$v_p \xrightarrow[p\to\infty]{L^2} u_1$ $= 2$

Ainsi $\alpha \|v_n' - v_p'\|_{L^2}^2 \leq 2\left(Q(v_n) + Q(v_p)\right) - \lambda_1 \|v_n - v_p\|$

$$\xrightarrow[n,p\to\infty]{} 2 \times 2\lambda_1 - \lambda_1 \cdot 2^2 = 0$$

et donc $(v_n')_n$ de Cauchy dans $L^2(I)$.

Comme (v_n) converge dans $L^2(I)$, elle est de Cauchy dans $L^2(I)$. Ainsi, $(v_n)_n$ est de Cauchy dans $H^1(I)$.

Comme $H_0^1(I)$ est un espace de Hilbert $(v_n)_n$ converge dans $H_0^1(I)$. On en déduit que $u_1 \in H_0^1(I)$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_1$ dans $H_0^1(I)$

[raisonner dans $\mathcal{D}'(I)$: $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$,

$$\int_I v_n \varphi' = - \int_I v_n' \varphi$$

si $v_n \to u_1$ L^2 et $v_n' \to u_2$ L^2,

on en déduit $\int_I u_1 \varphi' = - \int_I u_2 \varphi \quad \forall \varphi$

donc $u_1' = u_2$]

De plus Q est continue sur $H_0^1(I)$ $(a, q \in L^\infty(I))$

donc $Q(v_n) = J(v_n) \|v_n\|_{L^2}^2 = J(v_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda_1$

$$\Big\downarrow n\to\infty$$

$Q(u_1)$

et $\underline{Q(u_1) = \lambda_1}$.

c) Comme $v_n \to u_1$ dans $L^2(I)$ et $\|v_n\|_{L^2} = 1$ $\forall n$, on a $\|u_1\|_{L^2} = 1$.

Soit $v \in H_0^1(I)$. On note $j(t) = J(u_1 + tv)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$\begin{cases} u_1 \neq 0 \\ J(u_1) = \lambda_1 \end{cases}$ et par définition de λ_1, j admet

un point de minimum en $t=0$, donc

$j'(0) = 0$.

Avec $q(t) = Q(u_1 + tv)$ et $n(t) = \|u_1 + tv\|_{L^2}^2$

on a $q'(0) = 2 \int_I (a u_1' v' + q u_1 v)$

$n'(0) = 2 \int_I u_1 v$

et $j'(0) = \left(\frac{q}{n}\right)'(0) = \frac{q'(0) n(0) - q(0) n'(0)}{n(0)^2}$

donc $q'(0) n(0) = q(0) n'(0)$

i.e. $\left(\int_I a u_1' v' + q u_1 v\right) \underbrace{\|u_1\|_{L^2}^2}_{= 1} = \underbrace{Q(u_1)}_{= \lambda_1} \int_I u_1 v$

i.e. u_1 solution variationnelle de

$\underline{L u_1 = \lambda_1 u_1}$.

7) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose construits $\lambda_1 \dots \lambda_p$, $u_1 \dots u_p$. On pose

$$\lambda_{p+1} = \inf \{ J(u) \mid u \in H_0^1(I), u \neq 0, u \in \mathrm{Vect}(u_1 \dots u_p)^\perp \}$$

Notons $E_{p+1} = \{ u \in H_0^1(I), u \in \mathrm{Vect}(u_1 \dots u_p)^\perp \}$.

Alors E_{p+1} est un sous espace vectoriel fermé de $H_0^1(I)$ (E_{p+1} non vide car $H_0^1(I)$ de dimension infinie

La méthode utilisée à la question 6. permet encore de conclure qu'il existe $u_{p+1} \in H_0^1(I)$, $u_{p+1} \in \mathrm{Vect}(u_1 \dots u_p)^\perp$, tq

$$\|u_{p+1}\|_{L^2}^2 = 1 \text{ et } Lu_{p+1} = \lambda_{p+1} u_{p+1}$$

8) Comme $E_{p+1} \subset E_p$ (avec la définition du 7)), on a bien $\lambda_p \leq \lambda_{p+1}$ $\forall p \in \mathbb{N}$.

9) $(u_p)_p$ est une suite orthonormée de $L^2(I)$:

$$\|u_p\|_{L^2}^2 = 1 \quad ; \quad \langle u_p, u_n \rangle_{L^2} = 0 \text{ si } p \neq n$$

Comme (u_p) est bornée dans $L^2(I)$ Hilbert, elle admet une sous-suite qui converge faiblement dans $L^2(I)$, vers une limite notée u.

$\forall n, p$, $n \neq p$ $\langle u_n, u_p \rangle = 0$

A n fixé, $\lim_{p \to \infty} \langle u_n, u_p \rangle = \langle u_n, u \rangle$

et donc $\langle u_n, u \rangle = 0$, ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A la limite $n \to \infty$, on obtient $\langle u, u \rangle = 0$

et donc $u = 0$ dans $L^2(I)$.

Ainsi, il y a une valeur d'adhérence possible et donc toute la suite converge vers 0 faiblement

10) $(\lambda_p)_p$ est une suite croissante donc elle converge vers $l \in \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$.

Supposons par l'absurde l fini. Alors $(\lambda_p)_p$ est bornée par l. $(\lambda_1 \geq 0)$

Or $\forall p \in \mathbb{N}$, $\alpha \|u_p'\|_{L^2}^2 \leq Q(u_p) = \lambda_p \leq l$

donc $(u_p')_p$ bornée dans $L^2(I)$ et $(u_p)_p$ bornée dans $H_0^1(I)$. Par le théorème de Rellich, $(u_p)_p$ admet une sous-suite qui converge fortement dans $L^2(I)$, vers une limite notée $\tilde{u}$. Comme $\|u_p\|_{L^2} = 1$ $\forall p$, on a $\|\tilde{u}\|_{L^2} = 1$, mais $(u_p)_p$ converge aussi faiblement vers $\tilde{u}$ dans $L^2(I)$, donc par

9), $\bar{u} = 0$. Contradiction.

Ainsi $\underline{\lambda_p \xrightarrow[p \to \infty]{} +\infty}$.

11) Notons $V = \text{Vect}\{u_p, p \in \mathbb{N}^*\}$.

On va d'abord montrer que V est dense dans $H^1_0(I)$. Pour cela, on va utiliser sur $H^1_0(I)$ le produit scalaire associé à Q :

$$\langle v, w \rangle_Q = \int_{-1}^{1} a v' w' + q v w$$

Q est une norme équivalente à la norme H^1 sur $H^1_0(I)$:

$$\forall v \in H^1_0, \quad \alpha \|v'\|^2_{L^2} \leq Q(v) \leq \|a\|_{L^\infty} \|v'\|^2_{L^2} + \|q\|_{L^\infty} \|v\|$$

(+ Poincaré)

Montrons que $V^{\perp\langle,\rangle_Q} = \{0\}$, ce qui donnera bien le résultat.

Soit $v \in V^{\perp\langle,\rangle_Q}$. Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{-1}^{1} a u_p' v' + q u_p v = 0 = \lambda_p \int_{-1}^{1} u_p v.$$

Or $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_p \geq \lambda_1 \geq \frac{\alpha}{\,} > 0$ (cf. 4) et 8)) donc $\int_{-1}^{1} u_p v = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

i.e. $v \perp u_p \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$ dans $L^2(I)$

Ainsi $\quad v \in E_p \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$

et donc $\quad Q(v) \geq \lambda_p \|v\|_{L^2}^2 \quad \forall p$

$\underline{\text{si } v \neq 0} \qquad \xrightarrow[p \to \infty]{} +\infty$

Contradiction. Ainsi $v = 0$ et V est dense dans $H_0^1(I)$.

De plus, $H_0^1(I)$ est dense dans $L^2(I)$ ($H_0^1(I)$ contient $\mathcal{C}_c^\infty(I)$), d'où V est dense dans $L^2(I)$.

En effet, soit $v \in L^2(I)$, $\varepsilon > 0$. Il existe $w \in H_0^1(I)$ tq $\|v - w\|_{L^2} < \varepsilon/2$ et il existe $w_1 \in V$ tq $\|w - w_1\|_{H^1} < \varepsilon/2$.

Ainsi
$$\begin{aligned}\|v - w_1\|_{L^2} &\leq \|v - w\|_{L^2} + \|w - w_1\|_{L^2} \\ &\leq \|v - w\|_{L^2} + \|w - w_1\|_{H^1} \\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Ainsi $(u_p)_p$ est une famille orthonormée totale de $L^2(I)$: c'est une base hilbertienne de $L^2(I)$.

12) Comme $(u_p)_p$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$, tout $u \in L^2(I)$ s'écrit

$$u = \sum_{p=1}^{\infty} \langle u, u_p \rangle_{L^2} u_p$$

avec convergence dans L^2.

Mais on veut appliquer Q qui est continue sur $H_0^1(I)$ (mais pas sur $L^2(I)$). On utilise donc le résultat montré à la question précédente : $(u_p)_p$ est une base orthogonale de $H_0^1(I)$ (orthogonale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$) ; ainsi

$u \in H_0^1(I)$ s'écrit
$$u = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\langle u, u_p \rangle_Q}{\langle u_p, u_p \rangle_Q} u_p$$
$$= \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\langle u, u_p \rangle_Q}{\lambda_p} u_p$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def variationnelle de } u_p}}{=} \sum_{p=1}^{\infty} \langle u, u_p \rangle_{L^2} u_p$$

et là la convergence a bien lieu <u>dans $H_0^1(I)$</u>.

Ainsi $Q(u) = \lim_{N \to \infty} Q\left(\sum_{p=1}^{N} \langle u, u_p \rangle_{L^2} u_p\right)$ $\forall u \in H_0^1(I)$.

Or $\forall u \in H_0^1(I)$, $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$Q\left(\sum_{p=1}^{N} \langle u, u_p\rangle_{L^2} u_p\right) = \left\langle \sum_{p=1}^{N} \langle u, u_p\rangle_{L^2} u_p, \sum_{p=1}^{N} \langle u, u_p\rangle_{L^2} u_p \right\rangle_Q$$

$$= \sum_{p=1}^{N} \left(\langle u, u_p\rangle_{L^2}\right)^2 \langle u_p, u_p\rangle_Q$$

(car (u_p) orthogonale pour $\langle \cdot, \cdot\rangle_Q$)

$$= \sum_{p=1}^{N} \lambda_p \left(\langle u, u_p\rangle_{L^2}\right)^2.$$

Ainsi $\forall u \in H_0^1(I)$, $Q(u) = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p \left(\langle u, u_p\rangle_{L^2}\right)^2$.

13) a) Soit F un sous espace de dimension p de $H_0^1(I)$, $p \geq 1$.

- <u>Si $p = 1$</u>

il existe $v \in F$, $v \neq 0$ donc $J(v) \geq \lambda_1$.

- <u>Si $p \geq 2$</u>

avec les notations introduites au 7),

Vect $(u_1, \dots u_{p-1})$ et E_p sont supplémentaires
($\hookrightarrow$ fermé, car dim finie)

donc la codimension de E_p est $\leq p-1$.

Ainsi, comme dim $F = p$, on a

$F \cap E_p \neq \{0\}$. Ainsi il existe $v \in F \cap E_p$, avec $v \neq 0$. Par définition de λ_p, on a $J(v) \geqslant \lambda_p$.

b) On a donc montré :

- $\forall F$ sev de $H_0^1(I)$ de dim p, $\max\limits_{\substack{u \in F \\ u \neq 0}} J(u) \geqslant \lambda_p$

- Pour $F = \mathrm{Vect}(u_1 \ldots u_p)$, $\max\limits_{\substack{u \in F \\ u \neq 0}} J(u) = \lambda_p$ (*)

donc $$\lambda_p = \min_{\substack{F \text{ sev } \subset H_0^1(I) \\ \dim F = p}} \left(\max_{\substack{u \in F \\ u \neq 0}} J(u) \right).$$

<u>Preuve de (*)</u> : si $u = \sum\limits_{k=1}^{p} \langle u, u_k \rangle_{L^2} u_k$ alors (cf calcul question 12)),

$$Q(u) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(\langle u, u_k \rangle_{L^2} \right)^2 \leq \lambda_p \sum_{k=1}^{p} \left(\langle u, u_k \rangle_{L^2} \right)^2$$

$$\leq \lambda_p \|u\|_{L^2}^2$$