Université Lyon 1 Année 2013–2014
Master Mathématiques Générales $1^{\text{ère}}$ année
Analyse appliquée aux équations aux dérivées partielles

Feuille 1
Transformée de Fourier

Notations. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, on note :

(a) $x \cdot y$ le produit scalaire des vecteurs x et y dans $\mathbb{R}^n$: $x \cdot y = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

(b) $|x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$: $|x| = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$.

(c) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (α est un *multi-indice*) et $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}$.

(d) Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$.

(e) Pour $\beta \in \mathbb{N}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$,

$$\partial^\beta f(x) = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}(x).$$

Exercice 1. (*Transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, premières propriétés*)

Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, à valeurs complexes, on note $\mathscr{F}(f)$ ou $\widehat{f}$ la transformée de Fourier de f définie par

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x \cdot \xi} f(x)\, dx, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\mathscr{F}(f)$ est bien définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $\mathscr{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_b(\mathbb{R}^n)$ est une application linéaire continue. *On a noté $C_b(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs complexes. On le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.*
3. *Exemples.* Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes, pour $a > 0$:
   (a) $\mathbb{1}_{[-a,a]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (fonction indicatrice de $[-a, a]$),
   (b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{-a|x|}$.

Exercice 2. (*Classe de Schwartz et distributions tempérées*) On définit la classe de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ comme l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées, au sens suivant : une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si

$$p_{\alpha,\beta}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n.$$

1. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ a une structure naturelle d'espace métrique complet.
2. Montrer que la topologie de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par une suite croissante de normes :

$$N_p(f) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le p} p_{\alpha,\beta}(f) = \sum_{|\alpha|,\,|\beta|\le p} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)|,\ \forall\, f\in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ \forall\, p\in\mathbb{N}.$$

   Montrer qu'une suite $(f_k)_k$ de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ converge vers $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to\infty} N_p(f_k-f)=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}$.
3. Montrer qu'une forme linéaire $T:\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ est continue si et seulement si il existe $p\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que

$$|T(f)|\le CN_p(f),\quad \forall\, f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

   Un élément de $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est appelé *distribution tempérée.*
4. Montrer que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
5. Montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1\le p\le\infty$, et que cette inclusion est continue.
6. Montrer que $x\mapsto e^{-x^2}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Montrer que pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, $x\mapsto e^{-Ax\cdot x}$ est dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 3. (*Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$)

1. *Transformée de Fourier et dérivées.* Soit $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{F}(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ et que

$$\partial_{\xi_j}(\mathscr{F}(f))(\xi) = \mathscr{F}(-\imath x_j f)(\xi),\quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall\, j\in [\![1,n]\!].$$

   (b) Montrer que

$$\mathscr{F}(\partial_{x_j} f)(\xi) = \imath\xi_j \mathscr{F}(f)(\xi),\quad \forall\,\xi\in\mathbb{R}^n,\ \forall\, j\in [\![1,n]\!].$$

   (c) Montrer que $\mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
   (d) Montrer que $\mathscr{F}:\mathscr{S}(\mathbb{R}^n))\to\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ est linéaire et continue.
2. Soit $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\mathscr{F}(f)(\xi)=0$.
3. *Lemme de Riemann-Lebesgue.* Soit $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que $\lim\limits_{|\xi|\to\infty}\mathscr{F}(f)(\xi)=0$.
4. *Transformée de Fourier d'une gaussienne.* On note pour $a>0$, $g_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_a(x)=e^{-ax^2}$. On cherche à calculer la transformée de Fourier de g_a.
   (a) Calculer la dérivée de $\widehat{g_a}$. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{g_a}$.
   (b) En déduire que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, $\widehat{g_a}(\xi)=\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,e^{-\xi^2/(4a)}$.
   (c) Pour toute matrice $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, on note $G_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ x\mapsto e^{-Ax\cdot x}$. Montrer que pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$,

$$\mathscr{F}(G_A)(\xi)=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}e^{-A^{-1}\xi\cdot\xi/4}.$$

On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}$.

Exercice 4. (*Convolution*) Si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sont boréliennes, on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy,$$

sous réserve que l'intégrale existe.

1. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, montrer que :
   (a) $f * g$ est bien définie p. p. (par rapport à la mesure de Lebesgue).
   (b) $f * g = g * f$ p. p.
   (c) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}$.
2. Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. On définit $r \in [1, \infty]$ par l'égalité $\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.
   Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Montrer que :
   (a) $f * g$ est bien définie p. p.
   (b) *Inégalité de Young.* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}$.
3. Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, montrer que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Exercice 5. (*Suites et familles régularisantes*) Une famille $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est régularisante si :

(a) $\rho^\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
(b) $\rho \geq 0$.
(c) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho^\varepsilon(x)\,dx = 1$.
(d) Pour tout $\delta > 0$ et $R > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} \rho^\varepsilon(x)\,dx < \delta, \quad \forall\, \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Une suite régularisante est définie de manière similaire, en utilisant une suite $\varepsilon_k \to 0$ plutôt que tous les $\varepsilon > 0$.

1. Soit $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\rho \geq 0$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\,dx = 1$. On pose $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(x/\varepsilon)$.
   Montrer que la famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est régularisante.
2. Soit $(\rho^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une famille régularisante.
   (a) Si $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$, montrer que

   $$f * \rho^\varepsilon(x) \to f(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

   (b) Si $f \in UCB(\mathbb{R}^n)$, montrer que

   $$f * \rho^\varepsilon \to f \text{ uniformément quand } \varepsilon \to 0.$$

   $UCB(\mathbb{R}^n)$ est le sous espace de $C_b(\mathbb{R}^n)$ des fonctions uniformément continues et bornées.

(c) Même conclusion si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. $C_0(\mathbb{R}^n)$ *est le sous espace de* $C_b(\mathbb{R}^n)$ *des fonctions continues qui s'annulent à l'infini, c'est-à-dire telles que* $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$.

(d) Soit $p \in [1, \infty[$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, montrer que

$$f * \rho^\varepsilon \to f \text{ dans } L^p(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \varepsilon \to 0.$$

(e) Et si $p = \infty$?

Exercice 6. (*Formule d'inversion*)

Pour $\varepsilon > 0$, on note

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2/2}\, d\xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Calculer $F_\varepsilon(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, tout $\varepsilon > 0$.
2. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$.

   (a) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(x-y) f(y)dy = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi} e^{-\varepsilon|\xi|^2/2} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

   (b) Montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} F_\varepsilon(x-y) f(y)dy = f(x).$$

   (c) En déduire la formule d'inversion sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

3. Montrer la formule d'inversion de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}^n)$: pour toute $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ **telle que** $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi \text{ p. p.}$$

Exercice 7. (*Théorème de Plancherel, transformée de Fourier sur* $L^2(\mathbb{R}^n)$)

1. Montrer que pour tout $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$(\varphi, \psi)_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} (\widehat{\varphi}, \widehat{\psi})_{L^2}.$$

   On utilisera la formule d'inversion de la transformée de Fourier.

2. Montrer que la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ se prolonge de manière unique en un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^n)$, encore noté $\mathscr{F}$ ou $\widehat{\cdot}$, et que

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{(2\pi)^n}\|\widehat{f}\|_{L^2}^2, \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Donc à une constante multiplicative près, la transformée de Fourier est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On prendra garde au fait que la transformée de Fourier ainsi définie sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ ne l'est plus à l'aide de la formule (1), qui n'a plus de sens en général pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Méditer à l'exemple suivant : soit $\varepsilon > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = \dfrac{1}{x + \imath\varepsilon}$. Combien vaut $\widehat{f}$?

Exercice 8. (*Distributions tempérées et transformée de Fourier*)

1. Montrer qu'une masse de Dirac $\delta_a : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}, f \mapsto f(a)$, est une distribution tempérée ($a \in \mathbb{R}^n$).
2. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. On définit $T_f : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ par

   $$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

   Montrer que $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
3. Montrer que si f est un polynôme sur $\mathbb{R}^n$ alors on peut encore associer naturellement à f un élément $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.
4. Dans les deux cas, montrer que $f \mapsto T_f$ est injective.
5. *Transformée de Fourier sur $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.* On définit la transformée de Fourier d'une distribution tempérée T par

   $$\mathscr{F}(T)(\varphi) = T(\mathscr{F}(\varphi)), \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

   (a) Montrer que pour tout $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

   $$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathscr{F}\psi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}\varphi(x)\psi(x)\, dx.$$

   En déduire que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\mathscr{F}(T_f) = T_{\mathscr{F}f}$.

   (b) Calculer la transformée de Fourier de δ_0. Calculer de même la transformée de Fourier de δ_a, $a \in \mathbb{R}^n$.

   (c) *Formule d'inversion.* Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, soit $R\varphi(x) = \varphi(-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

      (i) Montrer que $R : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et que R est linéaire et continue entre ces espaces.

      (ii) Montrer que $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ est un isomorphisme, et que son inverse est donné par

      $$\mathscr{F}^{-1}(T) = \frac{1}{(2\pi)^n} T \circ R \circ \mathscr{F}, \quad \forall\, T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),$$

le sens de cette égalité étant le suivant :

$$\mathscr{F}^{-1}(T)(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} T(R\mathscr{F}(\varphi)), \quad \forall T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n),\ \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

(d) Calculer $\mathscr{F}(1)$.

Exercice 9. (*Transformée de Fourier d'une gaussienne, suite*)

On note pour $z \in \mathbb{C}$, $g_z : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g_z(x) = e^{-zx^2}$. On cherche à calculer la transformée de Fourier de g_z.

1. On suppose d'abord que $\mathcal{R}e\, z > 0$.
   (a) Montrer que $g_z \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. On note $\widehat{g_z}$ sa transformée de Fourier.
   (b) Calculer la dérivée de $\widehat{g_z}$. En déduire l'équation différentielle satisfaite par $\widehat{g_z}$.
   (c) En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{g_z}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{-\xi^2/(4z)}$,
   où $\sqrt{\cdot}$ désigne la détermination principale de la racine carrée.
2. On suppose maintenant $\operatorname{Re} z = 0$.
   (a) Montrer que $g_z \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.
   (b) En utilisant le résultat de la question précédente pour $z + \varepsilon$, ε réel > 0, calculer la tranformée de Fourier de g_z.

Exercice 10. (*Principe d'incertitude de Heisenberg*)

1. Soit $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ à valeurs complexes. Montrer que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq 2\pi \left(\int_{\mathbb{R}} x \operatorname{Re}\left(\bar{f}(x) f'(x)\right) dx\right)^2.$$

2. En déduire que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} x^2|f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right) \geq \frac{\pi}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^2.$$

3. Déduire de ce qui précède une minoration de

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (x-\bar{x})^2|f(x)|^2\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (\xi-\bar{\xi})^2|\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right)$$

pour $\bar{x}, \bar{\xi} \in \mathbb{R}$.

4. On suppose que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = 1$. Montrer que la quantité ci-dessus est minimale lorsque

$$\bar{x} = \int_{\mathbb{R}} x|f(x)|^2\, dx \quad \text{et} \quad \bar{\xi} = \int_{\mathbb{R}} \xi|\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi.$$

5. Calculer

$$\inf \left(\int_{\mathbb{R}} (x-\bar{x})^2|f(x)|^2\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} (\xi-\bar{\xi})^2|\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi\right)$$

lorque $\bar{x}$ et $\bar{\xi}$ sont choisis comme dans la question précédente et que f décrit l'ensemble des fonctions de $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = 1$.

Indication. On pourra étudier le cas où f est une gaussienne.