LAPLACIEN

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \partial_i (\partial_i) = \operatorname{div} \nabla$$

Equation $\underline{\text{elliptique}}$: symbole $|x|^2$

$\uparrow$

prototype

Equations plus générales :

$$\sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} \,, \quad A = (a_{ij})_{i,j} > 0$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x) \partial_{ij} \,, \quad A = A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j} > 0$$

(équations en forme non divergence)

$$\operatorname{div}(A(x)\nabla u) \quad , \quad A(x) > 0$$

(——— , ———— divergence)

Pas de théorie unifiée

non divergence : solutions fortes, ou de viscosité

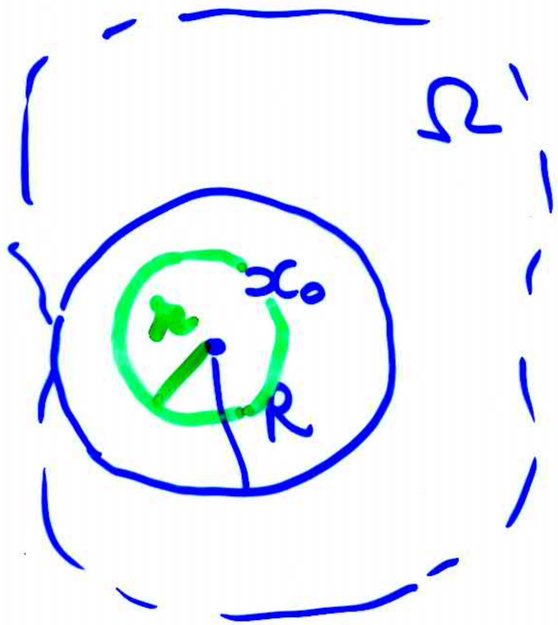
divergence : solutions faibles

Formule de la moyenne

Hyp. u harmonique dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$u \in C^2(\Omega)$, $\Delta u = 0$

$R = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$



Concl.

$$u(x_0) = \fint_{S(x_0,r)} u \, d\sigma = \fint_{B(x_0,r)} u \,,$$

$0 < r < R$

Preuve. OPS $x_0 = 0$. Soit

$$f(r) = \fint_{S(0,r)} u \, d\sigma = \fint_{S(0,1)} u(rx) \, d\sigma \quad (r \in [0, R)).$$

Etape 1. $$f'(r) = \fint_{S(0,1)} x \cdot (\nabla u)(rx) \, d\sigma = \fint_{S(0,r)} \frac{y}{r} \cdot \nabla u(y) \, d\sigma$$

$$= \fint_{S(0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma.$$

Etape 2. Gauss-Ostrogradskii (ou Green) $\Rightarrow$

$$0 = \int_{B(0,r)} \Delta u = \int_{S(0,r)} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\sigma \Longrightarrow f'(r) \equiv 0.$$

Etape 3. $f(r) \equiv f(0) = u(0) \Rightarrow u(0) = \fint_{S(0,r)} u \, d\sigma.$

Etape 4. $\displaystyle\int_{B(0,r)} u = \int_0^r \left(\int_{S(0,s)} u \, d\sigma \right) ds =$

$$\int_0^r \sigma_n \, s^{n-1} u(0) \, ds = \frac{\sigma_n r^n}{n} u(0) = \omega_n r^n u(0)$$

$$= |B(0,r)| \, u(0) \Rightarrow \fint_{B(0,r)} u = u(0). \qquad \square$$

$\boxed{\text{Corollaire de la preuve}}$ Si $-\Delta u \overset{\text{sousharm.}}{\leq} 0$ (ou $\overset{\text{surharm.}}{\geq} 0$) $\square$

$$\Rightarrow u(x_0) \underset{\geq}{\leq} \fint_{S(x_0,r)} u \underset{\geq}{\leq} \fint_{B(x_0,r)} u.$$

Principe du maximum

Hyp. Ω connexe, $u \in C^2(\Omega)$

$-\Delta u \leq 0$

$x_0 \in \Omega$ point de maximum

Concl. u constante.

Preuve : $M := u(x_0)$; $F := \{x \in \Omega \,;\, u(x) = M\}$

[But : $F = \Omega$]

F fermé ✓

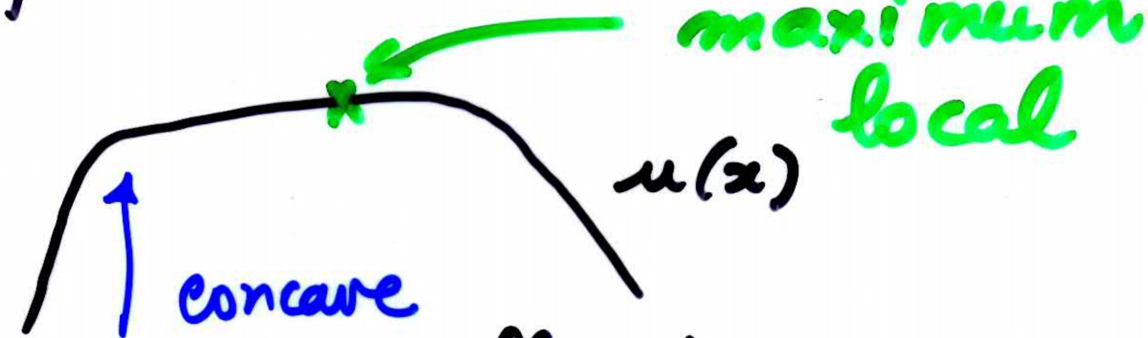
Il suffit de mq F ouvert.

$x_1 \in F$, $\quad R < \mathrm{dist}(x_1, \partial\Omega) \Longrightarrow$

$$M = u(x_1) = \fint_{B(x_1,R)} \underbrace{u}_{\leq M} \leq M \Longrightarrow$$

$u \equiv M$ ds $B(x_1, R) \Rightarrow \quad B(x_1, R) \subset F.$ $\qquad \square$

$\boxed{\text{Rq.}}$ a) *faux si maximum* **local**



b) vrai (mais plus difficile) si $-\Delta u = 0$

et maximum local

Idée de preuve : $-\Delta u = 0 \Rightarrow u$ analytique + u cste près de x_0

$\Rightarrow u$ cste. $\square$

(Principe des zéros isolés)

Corollaires du principe du maximum PM

$\boxed{C1}$ Principe du minimum ← on ne le dit pas !

$$\left.\begin{array}{l} \Omega \text{ connexe, } u \in C^2(\Omega) \\ -\Delta u \geq 0 \\ x_0 \text{ pt. de minimum de } u \end{array}\right\} \Longrightarrow u = \text{cste}.$$

$\boxed{C2}$ (PM !)

Hyp. : Ω borné ← pas supposé connexe

$u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$-\Delta u = 0$

Concl. $\min_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y)$

[u atteint ses valeurs extrêmes sur $\partial\Omega$]

Preuve. Etape 1. Un lemme de topologie

sert à se ramener au cas Ω connexe

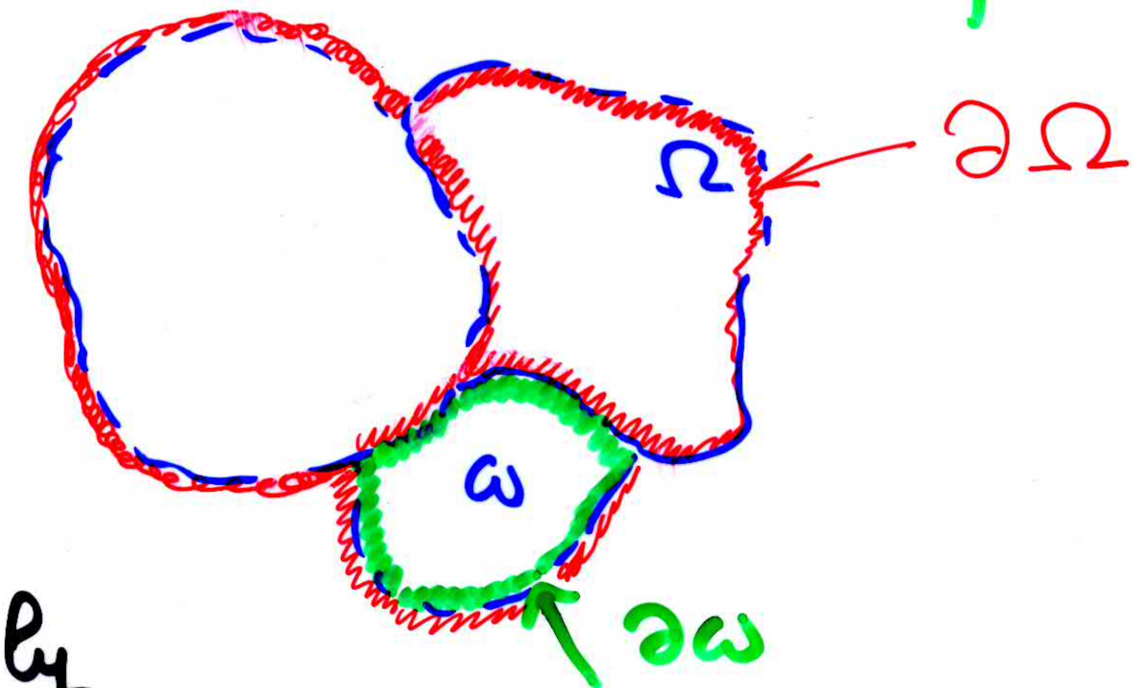
Lemme topologique

Hyp. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

ω composante connexe de Ω

Rappel : ω = ouverte, connexe par arcs

Concl. $\partial\omega \subset \partial\Omega$



$\square$

Preuve : poly

$\omega \Longrightarrow \Omega$: $x \in \Omega \Rightarrow \exists\, \omega$ tq $x \in \omega$

$$\Rightarrow \min_{y\in\partial\Omega} u(y) \leq \min_{y\in\partial\omega} u(y) \leq u(x) \leq \max_{y\in\partial\omega} u(y) \leq \max_{y\in\partial\Omega} u(y)$$

lemme topologique

Donc OPS Ω connexe.

Soit x_0 point de maximum.

→ Si $x_0 \in \partial\Omega$ ✓

→ si $x_0 \in \Omega \Rightarrow u \equiv u(x_0)$ ✓

$\square$

Idem pour minimum.

$\boxed{\text{Rq}}$ Variantes si u sous/sur harmonique. $\square$

$\boxed{C3}$ (Application au problème de Dirichlet)

$$(1)\ \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Solution?

Déf. Solution classique : $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ solution de (1).

Rq Conditions de compatibilité :
$f \in C(\Omega)$
$g \in C(\partial\Omega)$

$\boxed{C3}$ (Suite)

<u>Unicité</u> <u>Hyp.</u> Ω borné

<u>Concl.</u> (1) a au plus une solution.

<u>Estimation a priori:</u> <u>Hyp.</u> Ω borné

f bornée

<u>Concl.</u> Si u solution de (1) $\Longrightarrow$

$$|u| \leq \underset{\substack{\| \\ \max}}{\sup} |g| + C(\Omega) \sup |f|$$

Preuve :

Unicité : $f = g = 0 \Longrightarrow 0 \leq u \leq 0$. $\square$

Estimation a priori : $V(x) := \max|g| + \left(K - \frac{|x|^2}{2n}\right) \sup|f|$

gde cste tq $\frac{|x|^2}{2n} \leq K$ ds $\overline{\Omega}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} +\Delta V \leq -\sup|f| \leq -f & \text{ds } \Omega \\ V \geq \max|g| \geq g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\Delta(u-V) \leq 0 & \text{ds } \Omega \\ u-V \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \xrightarrow[\text{PM}]{} u \leq V \text{ ds } \Omega$$

$\Downarrow$

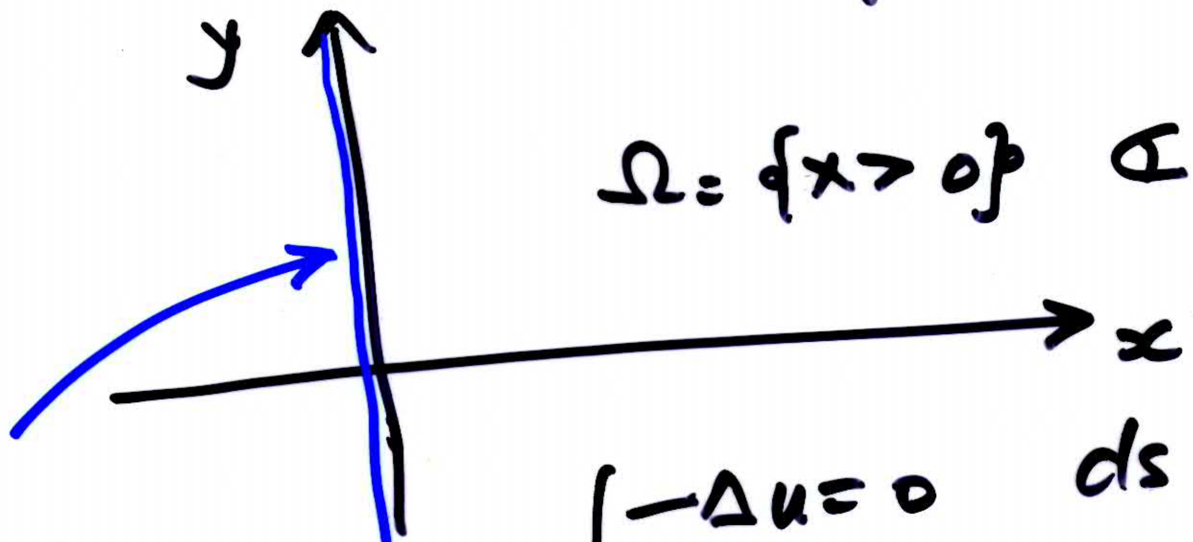
lequel ?

$$u \le \max|g| + \underbrace{K}_{\text{dépend de } \Omega} \sup|f|$$

De $\hat{m}$, $u \ge -v$ $\left[\Longrightarrow |u| \le v \le \max|g| + K \sup|f|\right]$ $\square$

$\boxed{\text{Rq}}$ a) Ω borné $\longleftarrow$ essentiel pour l'unicité

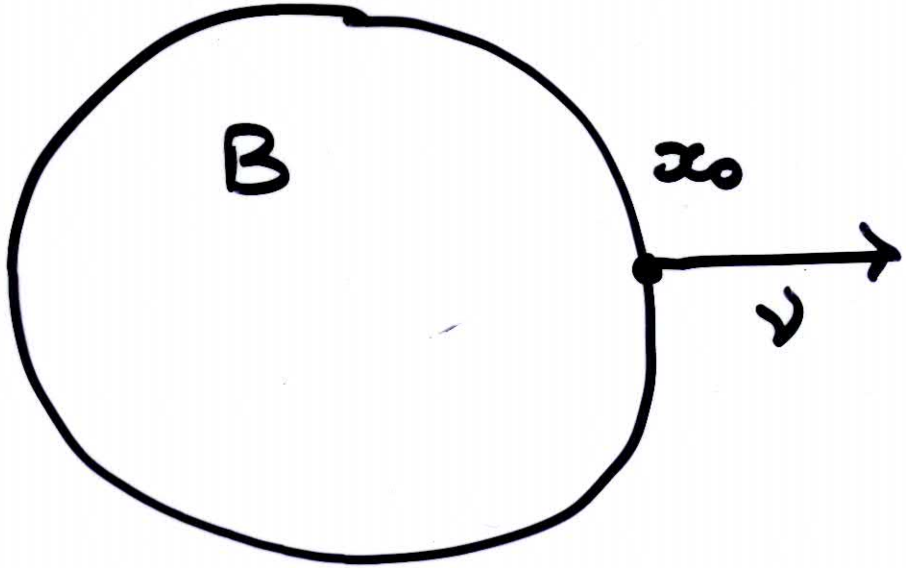
$\boxed{\text{Exemple}}$



$\Omega = \{x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$

$u(x,y) = x$ $\underbrace{\text{solution}}_{\neq 0}$ de $\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{ds } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

C4 Lemme de Hopf



$-\Delta u = 0$ ds B

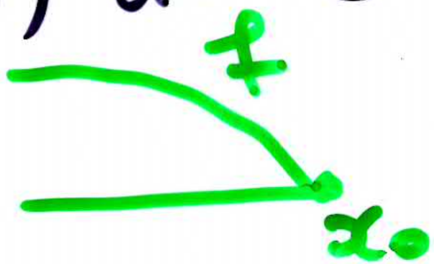
$u > u(x_0)$ ds B

$u \in C^1(\overline{B})$

$$\Downarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Rq $u \geq u(x_0)$ ds $B \Longrightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq 0$

Analogue



$f'(x_0) \leq 0.$

Preuve : OPS $B = B(0,R)$.

$$v(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-aR^2}$$

$\boxed{\text{Exo}}$: $a >> 1 \Rightarrow \Delta v \geq 0$ ds $B(0,R) \setminus \overline{B}(0,\frac{R}{2})$

$\varepsilon << 1 \Rightarrow u - \varepsilon v \geq 0$ sur $S(0,R) \cup S(0, R/2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Delta(u - \varepsilon v) \geq 0 & \text{ds } \omega = B(0,R) \setminus \overline{B}(0, R/2) \\ u - \varepsilon v \geq 0 & \text{sur } \partial\omega \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (P.M.) $u \geq \varepsilon v$ ds $\overline{\omega}$, avec égalité

en $x_0 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \leq \varepsilon \dfrac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) < 0.$ $\square$

$\boxed{\text{Le point}}$: Preuves du P.M.

#1 : formule moyenne ⟹ P.M.

#2 Hopf ⟹ P.M. (voir exos)

⚠ On peut obtenir Hopf sans P.M. (exos)

3 : méthode "énergétique" (multiplier l'équation par une quantité convenable).

→ Avantage : adaptée aux sol^{ns} faibles

→ Inconvénient : dans le cadre classique, demande plus de régularité

Preuve #3 :

Prop. $\Omega \in \mathrm{Lip}$, borné

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ ⟵ régularité supplémentaire requise

$-\Delta u \leq 0$ ds Ω

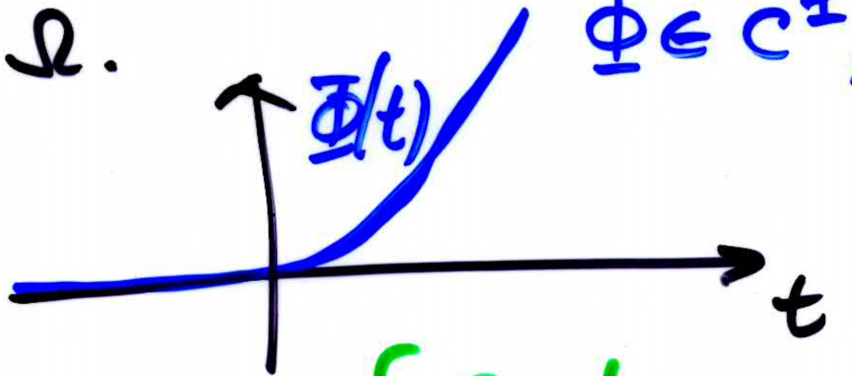
$u \leq 0$ sur $\partial\Omega$

$\Longrightarrow u \leq 0$ ds Ω.

<u>Preuve</u> : Soit

$\Phi \in C^1$, $\Phi(t) = 0, t \leq 0$

$\Phi'(t) > 0, t > 0$



Exemple : $\Phi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^2, & t > 0 \end{cases}$.

$$-\Delta u \leq 0 \quad \Big| \; \Phi(u) \Rightarrow -\underbrace{\int_{\partial\Omega} \Phi(u) \frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=0,\ \text{car } \Phi(u)=0 \text{ sur } \partial\Omega} + \int_{\Omega} \Phi'(u) |\nabla u|^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \Phi'(u) |\nabla u|^2 \leq 0 \Rightarrow \nabla u = 0 \text{ sur } \omega = \{x \in \Omega ; u(x) > 0\}$$

$$\Rightarrow \Phi'(u) \nabla u = 0 \Rightarrow \nabla(\Phi(u)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Phi(u) = \text{cste} \\ \Phi(u) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Phi(u) = 0 \Rightarrow u \leq 0$$

$\square$

Problème de Dirichlet

Thm (Poincaré)

<u>Hyp.</u> Ω Lipschitz, borné

$g \in C(\partial\Omega)$

<u>Concl.</u> $\exists! \, u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tq

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{ds } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Preuve : Gilbarg, Trudinger

Pb de Dirichlet plus général

$$(1)\quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{ds } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Donnée : $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$.

On cherche : $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

Rappel

Prop. (unicité + estimation)

Hyp. Ω borné . u solution de (1)

Concl : $|u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C(\Omega) \sup_{\Omega} |f|$. ($\Rightarrow$ unicité)

$\boxed{\text{Weierstrass : } f \text{ ne peut pas être quelconque}}$

$\exists f \in C(\Omega)$ tq $-\Delta u = f$ n'ait pas de solution C^2 (sauf si $n=1$!)

<u>Preuve</u> : OPS $0 \in \Omega$.
(idée)

$$v(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)\,|\ln|x||^\alpha, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \quad 0<\alpha<1$$

<u>Exo</u> : $-\Delta v := f$ se prolonge par continuité en 0. Mais $v \notin C^2$.

Pour cet f : $\nexists\, u \in C^2(\Omega)$ solution de $-\Delta u = f$.

$\boxed{\text{Ingrédient : principe des singularités artificielles}}$

Rappel analyse complexe :

$$\left| \begin{array}{l} f \in \mathcal{H}ol(\Omega \setminus \{z_0\}) \\ f \in C(\Omega) \end{array} \right. \Longrightarrow f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$$

Raffinement :

$$\left.\begin{array}{l} f \in \mathcal{H}ol(\Omega \setminus \{x_0\}) \\ f \text{ bornée au voisinage de } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \in \mathcal{H}ol(\Omega)$$

utilise la formule de la moyenne

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ harmonique ds } \Omega \setminus \{x_0\} \\ f \text{ bornée au voisinage de } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ harmonique dans } \Omega$$

voir poly pour la preuve

Retour sur l'exemple de Weierstrass : par l'absurde : $u \in C^2(\Omega)$, $-\Delta u = f \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} -\Delta(u-v)=0 \text{ dans } \Omega\setminus\{0\} \\ u-v \in C(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(principe des singularités artificielles) $\Delta(u-v)=0$ ds Ω

$\Rightarrow u-v \in C^2 \Rightarrow v \in C^2$ ⚡

$\boxed{\text{Concl.}}$ Besoin d'hypothèses sur f pour résoudre le pb. de Dirichlet

Poincaré : $f=0$ ok.
Hilbert : $f \in C^1$ ok.

Exemple de Zaremba (besoin d'hypothèses sur Ω)

Le pb.
$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } B(0,1) \setminus \{0\} \\ u = 0 & \text{sur } S(0,1) \\ u = 1 & \text{en } 0 \end{cases}$$
n'a pas de solution.

<u>Preuve</u> : Par l'absurde. P.M. $\Rightarrow$ u bornée. Principe des singularités artificielles $\Rightarrow$ $-\Delta u = 0$ ds $B(0,1)$.

$\Rightarrow u = 0$. Or, $u(0) = 1$ $\not\!\!\!\infty$

DM 3 : résolution explicite du pb. de Dirichlet dans un rectangle.

$\boxed{\text{Pb. de Neumann}}$ (plus difficile)

$$(2)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{ds } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ω Lipschitz ou mieux

$\Omega \in C^1$: solution classique $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$,

avec données $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$.

Prop. (Unicité)

Hyp: $\Omega \in C^2$, borné, connexe.
u sol. du (2) homogène

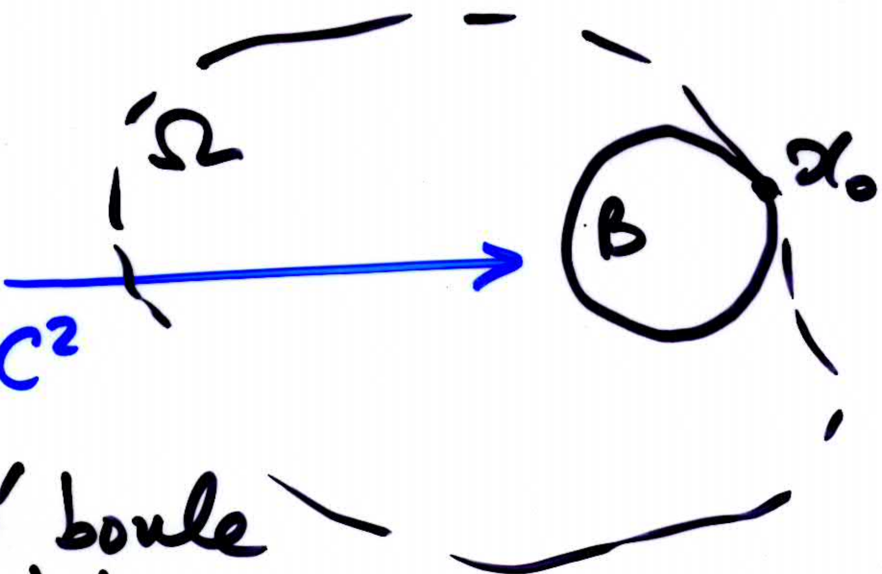
Concl. $u = \text{cste}$.

Preuve: x_0 = pt. de minimum. $\exists\, X_0 \in \Omega \Rightarrow u \equiv u(x_0)$
(P.M.)

Sinon: $u(x) \leq u(x_0), \forall x \in \Omega$.

$\exists B$
car $\Omega \in C^2$

(propriété boule intérieure)



Lemme de Hopf

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$

↯

Parallèle

analyse complexe ; fonctions harmoniques

Outil : formule intégrale de Cauchy | formule de Poisson / boule

$\mathcal{H}ol(\Omega)$ | $\mathcal{H}(\Omega)$

$\Omega \subset \mathbb{C}$ | $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$

DM3 : u analytique | ——— " ———

$|u^{(n)}| \leq$ fonction de $\|u\|_{L^\infty}$ | —— " ———

inég. de Cauchy

u bornée ⟹ u cste | ——— " ———

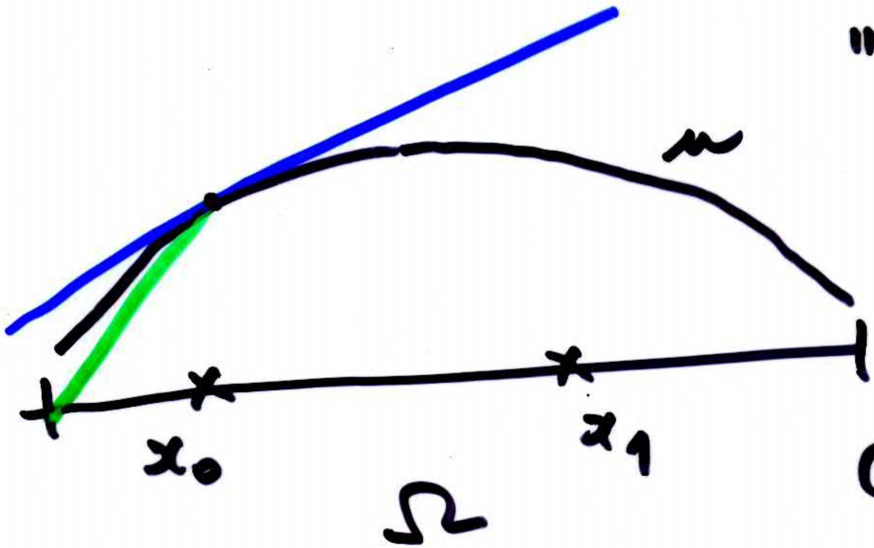
Liouville

Inégalité de Harnack

DM3

Heuristique : $n=1$

$-\Delta u \geq 0 \iff u$ concave



Si $u \geq 0 \Rightarrow$ tangente "moins pentue" que la sécante $\Rightarrow$ $u(x_0)$ et $\mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$ contrôle $u(x_1)$.

Inégalité de Harnack

Hyp : Ω connexe

$K \subset\subset \Omega$

$-\Delta u \geq 0$ dans Ω

$u \geq 0$

Concl : $\exists\, C = C(K, \Omega)$ tq

$$\max_K u \leq \min_K u .$$