

ONDES

$$\square u = u_{tt} - \Delta_x u, \quad u = u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}$$

Pb de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \square u = 0 \quad \text{ds } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = f \quad \text{ds } \mathbb{R}^n \quad \leftarrow \text{on cherche } u \in C^2 \\ u_t|_{t=0} = g \quad \text{ds } \mathbb{R}^n \quad \leftarrow \text{on doit avoir } f \in C^2, g \in C^1 \end{array} \right.$$

Rappel $n=1$: $u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x+t) + f(x-t)\}$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy \quad \leftarrow \text{d'Alembert}$$

si $f \in C^2, g \in C^1$

2

On va trouver la solution $n=2,3$ ("de même" si $n \geq 4$)

Moyennes sphériques

$$U(x, t; r) = \int u(y, t) d\sigma(y)$$

$S(x, r) \leftarrow$ sphère "en x "

$$= \int u(x + ry, t) d\sigma(y)$$

↑
 $S(0, r)$

c.v. $y = x + r Y$

Exo

$$U(x, t; r) = \int_{S(0,1)} u(x+ry, t) d\sigma(y) \text{ est}$$

$$\cdot C^2$$

• paire en r

$$U_{tt} = \int_{S(0,1)} u_{tt}(x+ry, t) d\sigma(y)$$

utilise

Exo

A isométrie linéaire \Rightarrow

$$\int_{S(0,1)} f \circ A = \int_{S(0,1)} f, \quad \forall f \text{ intégrable sur } S(0,1).$$

$$F(x; r) = \int_{S(x, r)} f(y) d\sigma(y), \quad G(x; r) = \int_{S(x, r)} g(y) d\sigma(y).$$

Resolution si $m=3$

Idée: fixer x . Trouver une équation satisfait par U . Trouver U . Retrouver u

Calcul de base

x fixé \Leftarrow par ex. $x=0$

$$U_r(x, t; r) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(0, r)} u(y, t) d\sigma(y) \right) =$$

$$S(0, r)$$

$$= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} u(r y, t) d\sigma(y) \right) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} \nabla_y u(r y, t) \cdot y d\sigma(y)$$

$$\stackrel{\text{ry} \sim y}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(0,r)} \nabla_y u(y, t) \cdot \frac{y}{r} d\sigma(y) \stackrel{\text{TFD}}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(0,r)} \Delta_x u(y, t) dy =$$

\uparrow

∇_y

$B(0,r)$ si $u_{tt} = \Delta_x u$

$$\frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(0,r)} u_{tt}(y, t) dy = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \underbrace{\left(\int_{S(0,s)} u_{tt}(y, t) dy \right)}_{= 4\pi s^2 U_{tt}(t, s)}$$

$\underbrace{\quad}_{\text{cf Exo}}$

$$\Rightarrow U_{rr}(t;r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r s^2 U_{tt}(t;s) ds$$

conclusion du calcul de base

↑
calcul analogue en toute dimension

$$\Rightarrow U_{rr} = -\frac{2}{r^3} \int_0^r s^2 U_{tt}(t;s) ds + U_{tt}(t;r)$$

$$\Rightarrow U_{rr} = -\frac{2}{r} U_r + U_{tt}$$

$$\Rightarrow rU_{rr} + 2U_r - rU_{tt} = 0$$

$$\Leftrightarrow (rU)_{rr} - (rU)_{tt} = 0.$$

Conclusion du calcul:

$$V(r,t) := rU(x,t;r)$$

vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{rr} - V_{tt} = 0 \quad \text{ds} \\ V(r,0) = rF(x,r) \\ V_t(r,0) = rG(x,r) \end{array} \right.$$

R^2 ← marche aussi pour
 $r < 0$

$$\Rightarrow rU(x, t; r) = \frac{1}{2} \left\{ (r+t) F(r+t) + (r-t) F(x, r-t) \right\} \\ + \frac{1}{2} \int_{r-t}^{r+t} SG(x, s) ds$$

$$\underline{u(x, t) = ?}$$

$$rU(x, t; r) = \frac{r}{4\pi} \int u(x+ry, t) d\sigma(y)$$

$S(0, 1)$

$$\Rightarrow u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(x, t)}{r} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{F(x, r+t)(r+t) + F(x, r-t)(r-t)}{2r} \right. \\ \left. + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} S G(x, s) ds \right\} =$$

$$F(x,t) + t F_x(x,t) + t G(x,t) \Rightarrow$$

$$u(x,t) = \int_S \{ f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x) + t g(y) \} d\sigma(y)$$

↑ formule de Kirschhoff

Thm

Hyp.

$$\begin{aligned} f &\in C^3(\mathbb{R}^3) \\ g &\in C^2(\mathbb{R}^3) \end{aligned}$$

u donnée par
Kirchhoff



moins bien que
les conditions de
compatibilité

Perte de régularité!

Concl.: u est la solution du pb de Cauchy.

Preuve: On admet le résultat suivant: Si

$f, g \in C_c^\infty \Rightarrow \exists$ solution $u \in C^2$.

- $f, g \in C_c^\infty \Rightarrow$ la solution est donnée par Kirchhoff
- f, g à support compact; on approche par $(f_i) \subset C_c^\infty, g_i \subset C_c^\infty \Rightarrow u$ est solution de $\Delta u = 0 \Rightarrow u$ est la solution.
- f, g quelconques: on remarque qu'il suffit d'approcher sur les compacts par des C_c^∞ .



Cas $n=2$

variable artificielle ¹²

$$\begin{cases} f = f(x_1, x_2) = \tilde{f}(x_1, x_2, x_3) \\ \tilde{g}(x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2) \end{cases}$$

On résout

$$\begin{cases} \square \tilde{u} = 0 \text{ ds } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \\ \tilde{u}|_{t=0} = \tilde{f} \\ \tilde{u}_t|_{t=0} = \tilde{g} \end{cases}$$

Si $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ solution \Rightarrow
 $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3 + a, t)$ solution, $\forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \tilde{u}$ ne dépend pas de $x_3 \Rightarrow$

↑
unicité

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \underbrace{\tilde{u}(x_1, x_2, 0, t)}_{:= u(x_1, x_2, t) = \text{sol.}} \text{ du pb. initial}$$

Méthode
de descente

Calcul explicite de $u \leftarrow$ avec
Kirchhoff:

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{S(0,1)} \{ f(x+ty) + t \nabla f(x+ty) \cdot y + t g(x+ty) \} d\sigma(y, z)$$

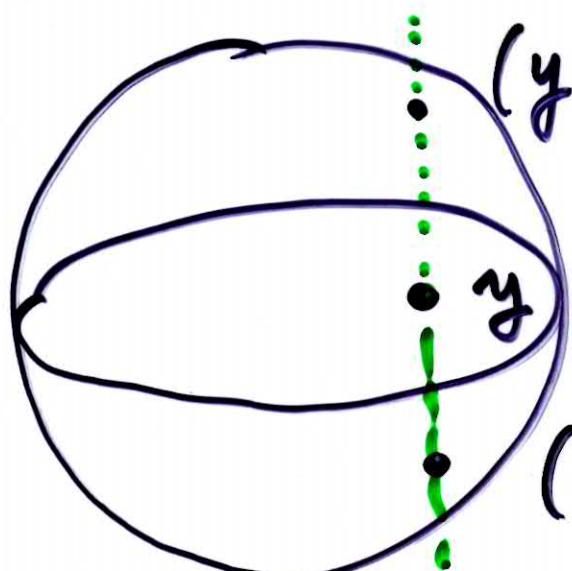
14

$$d\sigma(y, z)$$

$$d\omega_{\mathbb{R}^2}$$

$$d\omega_{\mathbb{R}}$$

Paramétrisation de la sphère via la boule:



$(y, \sqrt{1-|y|^2}) \leftarrow$ paramétrisation de
 $S(0,1) \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+)$

$(y, -\sqrt{1-|y|^2}) \leftarrow$ $S(0,1) \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-)$

$$(y_1, y_2) \xrightarrow{\Phi} (y_1, y_2, \pm \sqrt{1 - |y|^2})$$

$$J\Phi = \frac{1}{\sqrt{1 - |y|^2}}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{B(0,1)} \frac{1}{\sqrt{1 - |y|^2}} \left\{ f(x+ty) + t\nabla f(x+ty) \cdot y + t g(x+ty) \right\} dy$$

do \mathbb{R}^2

$$\overline{\overline{\quad}} \\ \uparrow \\ \text{c.v. } x+ty \rightsquigarrow y : B(0,1) \rightsquigarrow B(x, t)$$

\Rightarrow

Thm.

$$f \in C^3(\mathbb{R}^2)$$

$$g \in C^2(\mathbb{R}^2)$$

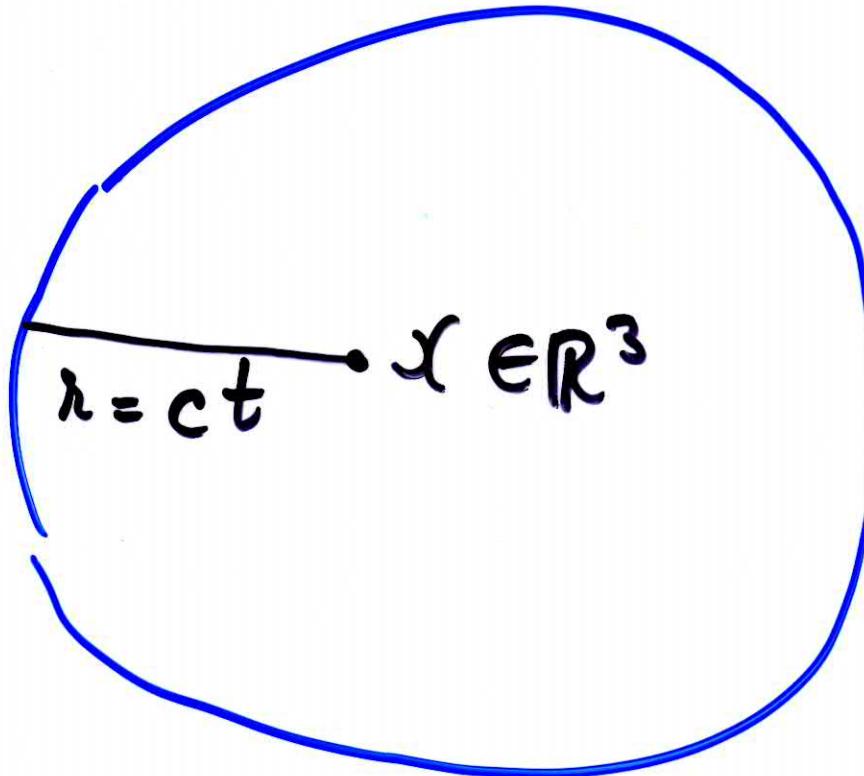
\Rightarrow la solution du pb. Cauchy est

$$u(x,t) = \frac{t}{2} \int_{B(x,t)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} (f(y) + \nabla f(y) \cdot (y-x) + t g(y)) dy$$

formule de Poisson

Dimension ≥ 4 : méthode analogue (voir poly)

Principe de Huyghens



$c = \text{vitesse du son}$
 $(c=1 \text{ dans } \square = \underline{\text{adimensionnalisée}})$

$u(x,t)$ ne dépend que
de $f, g | S(x,ct)$

presque

A l'instant t , on entend seulement les sons émis
à distance ct .

Flatland is hell

En 2D, on entend les sons émis à
 une distance $\leq ct$

↑
 une fois qu'on a entendu un son, on l'entend
 (de moins en moins fort) pour toujours.

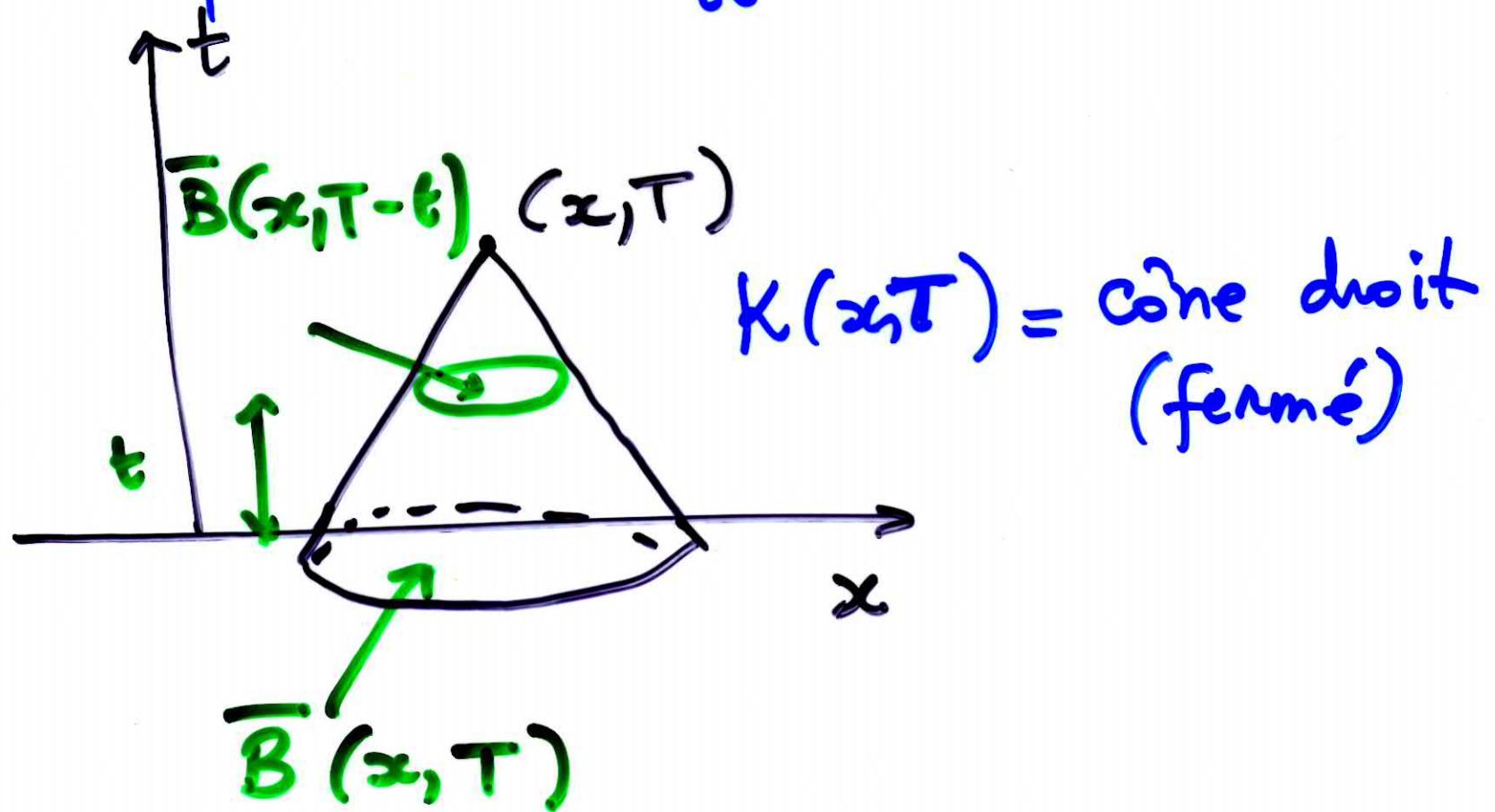
Phénomènes similaires en dimension 24,

n impair nice place

n pair hell

Unicité par la méthode de l'énergie

adaptée à $u_{tt} - \operatorname{div}(A \nabla u)$



Prop.

Hyp.
 $u \in C^2(K(x, T))$,
 $\square u = 0$
 $u|_{t=0} = 0$
 $u_t|_{t=0} = 0$

$\Rightarrow u = 0 \text{ do } K(x, T)$

Preuve

Calcul de base

$$f \in C^1(K(x, T)) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{B(x, T-t)} f \right\} = \frac{d}{dt} \left(\int_0^{T-t} \left(\int_S f d\sigma \right) ds \right) =$$

$$S(x, s)$$

$$\int_0^{T-t} \left(\int_t^T f d\sigma \right) ds - \int_{S(x, T-t)} f d\sigma \Rightarrow$$

 $S(x, s)$ $S(x, T-t)$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\int_{B(x, T-t)} f \right) = \int_{B(x, T-t)} f_t - \int_{S(x, T-t)} f d\sigma}$$

↑ calcul de base

$$u_{ttt} - \Delta_x u = 0 \quad | \quad u_t \rightarrow \int_{B(x, T-t)}$$

$$\Rightarrow \int_{B(x, T-t)} u_t u_{tt} + \int_{B(x, T-t)} \nabla_x u \cdot (\nabla_x u)_t = \int_{S(x, T-t)} \gamma_x \cdot \nabla_x u u_t$$

↑
 $B(x, T-t)$
1e Green

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \int_{B(x, T-t)} \partial_t (|\nabla u|^2) = \int_{S(x, T-t)} v_x \cdot \nabla_x u \ u_t \quad \Rightarrow$$

↑
calcul de base

$$f = |\nabla u|^2$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{B(x, T-t)} |\nabla u|^2 \right) = \int_{S(x, T-t)} (v_x \cdot \nabla_x u \ u_t - \frac{1}{2} |\nabla_x u|^2 - \frac{1}{2} u_t^2)$$

$$\stackrel{\uparrow}{\leq 0} \quad (\text{c. - s.})$$

$\begin{cases} \text{est } \geq 0 \\ \text{Vaut 0 en 0} \end{cases} \Rightarrow \nabla u = 0 \Rightarrow u = \text{constante} \Rightarrow u = 0.$

□

A regarder dans le poly :

- Formule de Dinhmél
- Résultat d'existence dans un domaine borné