Université Claude Bernard Lyon 1 — Master de mathématiques 1re année
UE Équations aux dérivées partielles — Parcours Mathématiques générales

Devoir surveillé $\#2$
Équirépartition de l'énergie dans l'équation des ondes
– le 6 mai 2025, durée 60 minutes –

Cadre général. Nous nous intéressons à l'équation des ondes homogène

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u_{t|t=0} = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{1}$$

avec données initiales $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Résultats admis. Nous admettons les résultats suivants.

i) Le problème (1) a une et une seule solution $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

ii) À t fixé, cette solution vérifie $u(\cdot, t) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ (dépendant de a et b) tel que $\operatorname{supp} u(\cdot, t) \subset K$, $\forall\, a \le t \le b$.

Questions.

(a) Soit, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[(u_t(x,t))^2 + |\nabla_x u(x,t)|^2\right]\, dx.$$

Monter que E est constante et donner la formule de $E(0)$.

(b) (Ce point peut être ignoré si la réponse à la question (d) ne repose pas sur l'utilisation de la transformée de Fourier.) Calculer, en justifiant la réponse, à t fixé, la transformée de Fourier de $u(\cdot, t)$ en fonction de celles de f et g.

(c) (Ce point peut être ignoré si la réponse à la question (d) ne repose pas sur l'utilisation de la transformée de Fourier.) Calculer, en justifiant la réponse,

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \cos^2(t|\xi|)\, d\xi. \tag{2}$$

(d) Justifier l'égalité

$$\lim_{|t|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u_t(x,t))^2\, dx = \lim_{|t|\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(x,t)|^2\, dx = \frac{1}{2} E(0). \tag{3}$$

Si la preuve de (3) repose sur l'utilisation de la transformée de Fourier, préciser les formules du type (2) qui sont utilisées dans la preuve.