Université Claude Bernard Lyon 1 | Master de mathématiques 1re année
UE Équations aux dérivées partielles | Parcours Mathématiques générales

Contrôle terminal
– le 23 mai 2025, durée 120 minutes –

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné.

Exercice # 1.

(1) Rappeler les définitions des espaces $H^1(\Omega)$, $H^1_0(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$, et les normes « usuelles » que l'on peut considérer sur ces espaces.

(2) Si $S \in H^{-1}(\Omega)$, montrer que l'équation $-\Delta u = S$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$ a une et une seule solution $u(S) \in H^1_0(\Omega)$.

(3) Montrer que, si on considère sur $H^1_0(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ des normes convenables (que l'on précisera), l'application $S \mapsto u(S)$ est une application linéaire unitaire de $H^{-1}(\Omega)$ vers $H^1_0(\Omega)$.

Exercice # 2. Soient $(e_j)_{j\geq 1} \subset H^1_0(\Omega)$ une base hilbertienne de $L^2(\Omega)$, et $\lambda_j > 0$, $\lambda_j \nearrow \infty$ tels que $-\Delta e_j = \lambda_j e_j$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$, $\forall\, j$.

Soit $T > 0$. On considère le problème

$$\begin{cases} \Box\, u = 0 & \text{dans } \Omega_T := \Omega \times]0, T[\\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \Omega \\ u_{t|t=0} = g & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases} . \tag{1}$$

(1) Si $f \in H^1_0(\Omega)$, rappeler les formules reliant $\|f\|_{H^1_0(\Omega)}$, $\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}$ et $(f, e_j)_{L^2(\Omega)}$, $j \geq 1$.

(2) Proposer, en expliquant la démarche et les calculs formels, une solution formelle $u = u(x, t)$, $x \in \Omega$, $0 \leq t < T$, de (1).

(3) Si $f \in H^1_0(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$, montrer que la solution formelle ainsi obtenue a les propriétés suivantes :
   (a) $\Box\, u = 0$ dans $\mathscr{D}'(\Omega_T)$.
   (b) $u(\cdot, t) \in H^1_0(\Omega)$, $\forall\, 0 \leq t < T$, et $u \in C([0, T[; H^1_0(\Omega_T))$.
   (c) $\lim\limits_{t \searrow 0} u(\cdot, t) = f$ dans $H^1_0(\Omega)$.
   (d) $u(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$, $\forall\, 0 \leq t < T$, et $u \in C^1([0, T[; L^2(\Omega))$.
   (e) $\lim\limits_{t \searrow 0} u_t(\cdot, t) = g$ dans $L^2(\Omega)$.

(4) Au passage, énoncer les résultats abstrait utilisés pour prouver les items (b) et (d), et montrer l'un d'entre eux.

(5) A-t-on $u \in C^2([0, T[; H^{-1}(\Omega))$?