

À propos de l'inégalité triangulaire

Lemme. Soient $(X, \mathcal{F}, \mu)$, $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ deux espaces mesurés, avec μ et ν σ -finies. Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$ mesurable et, pour simplifier, *positive*. Alors

$$\left\| x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right\|_{L^p(X)} \leq \int_Y \|x \mapsto f(x, y)\|_{L^p(X)} d\nu(y). \quad (1)$$

Démonstration. Si $p = 1$, nous avons en fait égalité, grâce au théorème de Tonelli.

Supposons $1 < p < \infty$. *Préliminaire.* Le théorème de Tonelli montre que, dans le deuxième membre de (1), l'intégrande est mesurable (comme fonction de y).

Posons

$$F(x) := \int_Y f(x, y) d\nu(y),$$

qui est mesurable et positive (cf le théorème de Tonelli). Nous avons

$$\|F\|_p = \sup \left\{ \int_X F(x)g(x) d\mu(x) ; g \in \mathcal{L}^q(X; [0, \infty]), \|g\|_q \leq 1 \right\} \quad (2)$$

(voir les propositions 10.18 et 10.19 du poly de mesure et intégration).

Avec g comme dans (2), le théorème de Tonelli et l'inégalité de Hölder donnent

$$\begin{aligned} \int_X F(x)g(x) d\mu(x) &= \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y)g(x) d\mu(x) \\ &= \int_Y \int_X f(x, y)g(x) d\mu(x) d\nu(y) \\ &\leq \int_Y \|x \mapsto f(x, y)\|_{L^p(X)} \|g\|_q d\nu(y). \end{aligned} \quad (3)$$

On conclut en prenant, dans (3), le sup sur g comme dans (2). □