

# Introduction aux équations aux dérivées partielles

Petru Mironescu

2023



# Avant de commencer

## Bulles de savon

Une bulle de savon est une surface minimale, c'est-à-dire une surface  $\Sigma$  qui réalise le minimum de l'aire parmi toutes les surfaces qui s'appuient sur son bord. Si  $\Sigma$  est paramétrée, par exemple de la forme

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = u(x, y) \end{cases} \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (1)$$

alors le bord de  $\Sigma$  est paramétré par la restriction  $u_0$  de  $u$  à  $\partial D$ , et en particulier  $u$  réalise

$$\min \left\{ \int_D \sqrt{1 + |\nabla v|^2}; v|_{\partial D} = u_0 \right\}.$$

En explicitant le fait que

$$\int_D \sqrt{1 + |\nabla(u + t\varphi)|^2} \geq \int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2}, \quad \forall \varphi \in C_c^1(D), \forall t \in \mathbb{R},$$

on obtient

$$\int_D \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \cdot \nabla \varphi = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^1(D). \quad (2)$$

C'est la *formulation variationnelle* (ou *forme faible*) de l'équation des surfaces minimales.

En utilisant successivement l'intégration par parties (Corollaire 8.25) et le principe de localisation (Proposition 8.35), on trouve la *forme forte* ou *forme classique* de l'équation des surfaces minimales :

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 0 \quad \text{dans } D, \quad (3)$$

couplée avec la condition aux limites (CL)

$$u = u_0 \quad \text{sur } \partial D. \quad (4)$$

## Tout un programme...

La question de l'existence d'une surface minimale s'appuyant sur une courbe donnée est le *problème de Plateau*. Dans le cas d'une courbe simple, le problème de Plateau a été résolu en 1930 par Radó et Douglas.<sup>1</sup> La généralisation de ce résultat aux dimensions supérieures a

---

1. Pour ce résultat, Douglas reçu en 1936 la médaille Fields.

donné naissance à une nouvelle branche de l'analyse, la *théorie géométrique de la mesure*, dont les fondations sont dues à De Giorgi, Federer et Fleming. Leur démarche est typique pour le développement des équations aux dérivées partielles au 20<sup>e</sup> (et peut-être 21<sup>e</sup>) siècle; elle sera en toile de fond de ces notes.

1. Dans un premier temps, on généralise la notion de surface; c'est l'un des buts de la théorie géométrique de la mesure. Pour d'autres EDP, il s'agit plutôt de généraliser la notion de fonction; ce sera fait dans le cadre de la théorie des espaces de Sobolev, ou plus généralement à travers la théorie des distributions, dont les origines remontent à Tonelli, Lebesgue et de la Vallée Poussin, et dont les grands noms sont Sobolev et Schwartz.
2. Dans ce cadre généralisé, il sera (plus) facile d'établir l'existence d'une solution; un exemple typique sera la résolution de l'équation de Poisson en utilisant le lemme de Lax-Milgram.
3. Les deux premiers points constituent la partie facile de la démarche. Ils permettent d'obtenir une solution "faible" ou "généralisée". La partie difficile consiste en l'analyse des propriétés de ces solutions. En particulier, la *théorie de la régularité* étudie si les solutions faibles sont des solutions "fortes". D'autres questions concernent l'unicité, les propriétés de symétrie, le comportement en temps long dans le cas des équations d'évolution.

A peu de résultats près, la théorie de la régularité dépasse le cadre de ce texte introductif aux EDP, qui est consacré :

1. A la théorie classique des EDP, correspondant à peu près aux 18<sup>e</sup> et 19<sup>e</sup> siècles. Les mathématiciens n'ont pas attendu Douglas pour étudier les surfaces minimales; Euler savait déjà en construire en 1740. L'accent sera mis sur la construction explicite des solutions, et sur les propriétés "calculatoires": formules de moyenne, problèmes bien ou mal posés, calcul symbolique (Laplace, Fourier). Cette partie est souvent sous-estimée dans les ouvrages introductifs aux EDP<sup>2</sup>; l'un des arguments est l'impossibilité de résoudre explicitement la plupart des EDP. Néanmoins, les méthodes explicites interviennent de façon fondamentale dans la résolution non explicite des EDP. Le prototype est la résolution du problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un domaine quelconque, résolution qui utilise de manière cruciale la solution exacte dans une boule. Par ailleurs, on ne commence pas l'intégration par les méthodes numériques sous prétexte que la plupart du temps on ne sait pas calculer les primitives ☺.
2. Aux généralisations de la notion de fonction. L'accent sera mis sur les espaces de Sobolev, mais nous regarderons aussi quelques points de la théorie des distributions. Ces théories, combinées avec des arguments abstraits d'analyse fonctionnelle, seront appliquées à l'existence des solutions des EDP. En particulier, nous retrouverons un autre résultat classique, la séparation des variables, comme une application de la théorie des opérateurs compacts auto-adjoints.
3. En dernière partie, nous présenterons les grandes lignes de la théorie de Hille-Yosida, qui permet de voir de manière unitaire de nombreuses équations d'évolution.

Les preuves seront l'occasion de passer en revue les bases de l'analyse: calcul intégral et différentiel, analyse fonctionnelle, bases de l'analyse sur les variétés. Ce n'est pas un hasard: de nombreux outils d'analyse ont été développés précisément pour résoudre les EDP. Un exemple célèbre parmi d'autres: la transformée de Fourier.

---

2. A l'exception notable du remarquable livre d'Evans [6].

## Exemples d'EDP

1. Équation de la chaleur :

$$\begin{cases} (EDP) & Lu := u_t - \Delta_x u = F(x, t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ (CI) & u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega \\ (CL) & & \end{cases} .$$

Ici,  $u = u(x, t)$  est une température, avec  $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $t \geq 0$ ;  $\Omega$  est le domaine physique étudié. La donnée  $u_0$  est la température initiale. La *CL* peut être, par exemple :

(a) La condition de Dirichlet (la température au bord du domaine est connue) :  $u(x, t) = v(x, t)$ ,  $x \in \partial\Omega$ ,  $t \geq 0$ .

(b) La condition de Neumann (le flux de température est connu au bord) :  $\frac{\partial u}{\partial \nu_x}(x, t) = v(x, t)$ ,  $x \in \partial\Omega$ ,  $t \geq 0$ .

2. Équation de Poisson :

$$\begin{cases} (EDP) & \Delta u = F(x) & \text{dans } \Omega \\ (CL) & & \end{cases} ,$$

où la condition aux limites peut être de Dirichlet, de Neumann, ou encore

(c) La condition de Robin :  $\alpha(x)u(x) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = v(x)$ ,  $x \in \partial\Omega$ .

Cette équation décrit, entre autres, un état d'équilibre thermique.

Si  $F = 0$ , on obtient l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$ . Il est de plus en plus courant de désigner les deux équations comme l'équation de Laplace.

3. Équation de Schrödinger :

$$\begin{cases} (EDP) & iu_t + \Delta_x u = V(x)u & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ (CI) & u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases} .$$

L'inconnue  $|u|^2$  est la densité d'une particule (donc  $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^2 dx = 1$ ),  $V$  est un potentiel, et  $u_0$  est la condition initiale.

4. Equation des ondes :

$$\begin{cases} (EDP) & \square u := u_{tt} - \Delta_x u = F(x, t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ (CI) & u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega \\ (CI) & u_t|_{t=0} = v_0 & \text{dans } \Omega \\ (CL) & & \end{cases} .$$

Ici,  $u$  décrit les petites vibrations longitudinales d'un corps (corde, membrane, solide) élastique, et les conditions aux limites sont de Dirichlet, Neumann, ou Robin.

5. Equation de transport :

$$\begin{cases} (EDP) & u_t + \operatorname{div}_x(f(u)) = F(x, t) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ (CI) & u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases} ,$$

donnant par exemple la vitesse  $u(x, t)$  d'un véhicule situé à l'instant  $t$  à l'endroit  $x$ .

Ce sont les équations étudiées le plus en détail dans la suite. La liste des EDP les plus importantes est bien plus longue; voir par exemple [6, pp. 3–6] et la référence à Zwillinger à cet endroit.

Pour la déduction de ces équations à partir des lois de la physique, voir par exemple [12], [11] et [20].

## Classification, symbole

L'équation de transport est une équation du premier ordre. La forme générale d'une équation du premier ordre est  $F(x, u, \nabla u) = 0$ .

Les équations de la chaleur, de Laplace, des ondes et de Schrödinger sont bâties à partir d'opérateurs linéaires à coefficients constants. La forme générale d'un tel opérateur est  $u \mapsto \sum_{\text{finie}} c_\alpha \partial^\alpha u$ . Il est commode de noter de manière compacte un tel opérateur  $P(\partial)$ . Par exemple, pour l'équation des ondes on a  $P(\partial) = \partial_t^2 - \Delta_x$ . On associe à  $P(\partial)$  un polynôme de plusieurs variables, le *symbole*  $P(x)$ . Pour  $\Delta$ , ce symbole est  $P(x) = |x|^2$ ; pour  $\square$ , il est  $t^2 - |x|^2$ . Plus généralement, le symbole de  $c_\alpha \partial^\alpha$  est  $\sum c_\alpha x^\alpha$ .

Les équations linéaires du second à coefficients réels sont classifiées de la même façon que les formes quadratiques :  $\Delta$ , dont les lignes de niveau du symbole  $x_1^2 + \dots + x_n^2 = |x|^2$  sont des sphères, est "elliptique", l'opérateur de la chaleur  $L$  de symbole  $t - |x|^2$  est "parabolique", alors que  $\square$ , de symbole  $t^2 - |x|^2$ , est "hyperbolique". Les opérateurs de différents types ont des propriétés qualitatives différentes; ceux du même type partagent bon nombre de propriétés. Malgré les apparences, l'équation de Schrödinger est un système et ne rentre pas dans le cadre de cette discussion.

## Divers

Les énoncés des résultats les plus importants sont sur fond gris.

Les exercices suivis d'un astérisque sont immédiats. Les autres sont assortis d'indications.

Un index des notations utilisées se trouve à la fin de ces notes.

# Table des matières

<b>Avant de commencer</b>	<b>3</b>
<b>I Solutions classiques</b>	<b>9</b>
1 Méthodes à la Fourier	11
2 Laplacien	21
3 Chaleur	31
4 Ondes	43
5 Schrödinger	49
<b>II Solutions généralisées. Méthodes fonctionnelles</b>	<b>51</b>
6 Méthodes fonctionnelles pour $\Delta$ , $L$ et $\square$	53
<b>III Outils d'analyse pour les équations aux dérivées partielles</b>	<b>61</b>
7 Rappels de topologie et analyse fonctionnelle	63
8 Intégration et analyse géométrique	67
9 Espaces de Sobolev	79
10 Théorie des distributions	97
Notations	105





**Première partie**  
**Solutions classiques**



# Chapitre 1

## Méthodes à la Fourier

### Equation de la chaleur dans le demi-espace

On considère le problème

$$\begin{cases} Lu = u_t - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}. \quad (1.1)$$

En appliquant (formellement) la transformée de Fourier dans la variable  $x$ , on obtient (via le Théorème 8.28 4.) que la fonction  $v(\xi, t) = \mathcal{F}_x u(\cdot, t)(\xi)$  vérifie

$$\begin{cases} v_t + |\xi|^2 v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ v(\xi, 0) = \mathcal{F} f(\xi) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (1.2)$$

ce qui donne  $v(\xi, t) = e^{-t|\xi|^2} \mathcal{F} f(\xi)$  et suggère (en utilisant le Théorème 8.28 5., le Corollaire 8.29 et la Proposition 8.30) la solution

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x, y, t) dy, & \text{si } t > 0 \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}, \quad \text{où } K(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/(4t)}; \quad (1.3)$$

$K$  est le noyau de la chaleur.

#### 1.1 Théorème.

*Hypothèses.*  $1 \leq p \leq \infty$ .  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .  $u$  est donnée par (1.3).

*Conclusions.*

1.  $u$  vérifie  $Lu = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ .
2. Si  $p < \infty$ , alors  $\lim_{t \searrow 0} u(\cdot, t) = f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .
3. Même conclusion si  $p = \infty$ , et de plus  $f$  bornée et uniformément continue.
4. Si  $f \in C_b$ , alors  $\lim_{t \searrow 0} u(\cdot, t) = f$  uniformément sur les compacts.

*Démonstration.*

*Étape 1.*  $u \in C^\infty$  et  $Lu = 0$ . Soient  $M \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ . En utilisant l'Exercice 1.13, on a

$$|\partial_{(x,t)}^\alpha [K(x, y, t) f(y)]| \leq C_\alpha e^{-a|y|^2} |f(y)|, \quad (x, t) \in M, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.4)$$

Le membre de droite de (1.4) est dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , car  $f \in L^p$  et les gaussiennes sont dans  $L^q$  pour tout  $q$ ; on conclut en prenant  $q = p'$  et en utilisant l'inégalité de Hölder (Proposition 8.1).

On obtient que  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*)$  et

$$\partial^\alpha u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_{(x,t)}^\alpha K(x, y, t)] f(y) dy.$$

En particulier,

$$Lu(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} [L_{(x,t)} K(x, y, t)] f(y) dy = 0,$$

grâce à l'Exercice 1.12.

Étape 2. Comportement de  $u(\cdot, t)$  pour  $t \searrow 0$ . Soit  $\rho(x) = (4\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/4}$ , de sorte que

$$u(x, t) = \rho_{\sqrt{t}} * f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

En notant que  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\rho \geq 0$  et  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$ , on conclut grâce au Théorème 8.5.  $\square$

## Equation des ondes 1D

On applique la même démarche au problème

$$\begin{cases} \square u = u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ u|_{t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R} \\ u_t|_{t=0} = g & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.5)$$

On trouve

$$\begin{cases} v_{tt} + \xi^2 v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ v(\xi, 0) = \mathcal{F}f(\xi) & \text{dans } \mathbb{R} \\ v_t(\xi, 0) = \mathcal{F}g(\xi) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases},$$

d'où

$$v(\xi, t) = \cos(\xi t) \mathcal{F}f(\xi) + \frac{\sin(\xi t)}{\xi} \mathcal{F}g(\xi) = \frac{e^{i\xi t} + e^{-i\xi t}}{2} \mathcal{F}f(\xi) + \frac{\sin(\xi t)}{\xi} \mathcal{F}g(\xi).$$

En utilisant l'Exercice 8.45, on devine la solution

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy. \quad (1.6)$$

Un calcul direct confirme cette intuition.

### 1.2 Proposition.

*Hypothèses.*  $f \in C^2(\mathbb{R})$ .  $g \in C^1(\mathbb{R})$ .  $u$  est donnée par (1.6).

*Conclusions.*

1.  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ .
1.  $u$  vérifie (1.5).

**1.3 Remarque.** On voit déjà deux différences de taille entre les deux équations. D'une part, l'équation de la chaleur a un effet régularisant :  $u$  devient  $C^\infty$ , même si la donnée initiale ne l'est pas. Ce n'est pas le cas de l'équation des ondes. D'autre part, le temps est réversible dans l'équation des ondes : on peut prédire le passé à partir du présent. On peut montrer que tel n'est pas le cas pour l'équation de la chaleur.

## Equation de Laplace dans le demi-espace

Commençons par le cas du demi-plan :

$$\begin{cases} \Delta u = u_{tt} + u_{xx} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}.$$

Comme ci-dessus, on trouve  $v(\xi, t) = C(\xi)e^{-\xi t} + D(\xi)e^{\xi t}$ . Intuitivement,  $v$  doit être petite (c'est une transformée de Fourier, qui est bornée), d'où  $v(\xi, t) = E(\xi)e^{-|\xi|t}$ . On trouve  $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} P(x - y, t)f(y) dy$ , où  $\mathcal{F}_x P(\cdot, t)(\xi) = e^{-|\xi|t}$ . La formule d'inversion de Fourier (Théorème 8.28 6.) suggère

$$P(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{-|\xi|t} d\xi = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}.$$

Passons au demi-espace :

$$\begin{cases} \Delta u = u_{tt} + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}. \quad (1.7)$$

La démarche ci-dessus mène à

$$P(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} e^{-|\xi|t} d\xi = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}; \quad (1.8)$$

voir l'Exercice 8.47.  $P$  est le noyau de Poisson, et on a deviné la solution

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} P(x - y, t)f(y) dy, & \text{si } t > 0 \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}. \quad (1.9)$$

### 1.4 Théorème.

*Hypothèses.*  $1 \leq p \leq \infty$ .  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .  $u$  est donnée par (1.9).

*Conclusions.*

1.  $u$  vérifie  $\Delta u = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ .
2. Si  $p < \infty$ , alors  $\lim_{t \searrow 0} u(\cdot, t) = f$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .
3. Même conclusion si  $p = \infty$ , et de plus  $f$  bornée et uniformément continue.
4. Si  $f \in C_b$ , alors  $\lim_{t \searrow 0} u(\cdot, t) = f$  uniformément sur les compacts.

*Démonstration.* On raisonne comme dans la preuve du Théorème 1.1, avec

$$\rho(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \frac{1}{(1^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}},$$

de sorte que  $u(\cdot, t) = \rho_t * f$ . Le fait que  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$  suit de l'Exercice 8.46. □

## Equation de Schrödinger

On considère le problème

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = f \end{cases} \quad (1.10)$$

On peut adapter la stratégie suivie pour l'équation de la chaleur, mais ceci demande de généraliser la transformée de Fourier au-delà de  $L^1$ . Ce sera fait plus tard, mais pour l'instant nous allons plutôt adapter une stratégie ad hoc. On commence par regarder le problème approché

$$\begin{cases} u_t^\varepsilon - (\nu + \varepsilon)\Delta_x u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon|_{t=0} = f \end{cases}.$$

En utilisant la Proposition 8.30, on trouve, pour  $t > 0$ , la solution

$$u^\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\rho^\varepsilon)_{\sqrt{t}}(x-y) f(y) dy, \text{ où } \mathcal{F} \rho^\varepsilon(\xi) = e^{-(\nu+\varepsilon)|\xi|^2}, \rho^\varepsilon(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi(\nu+\varepsilon)})^n} e^{-|x|^2/(4(\nu+\varepsilon))}. \quad (1.11)$$

Un passage formel à la limite dans (1.11), accompagné d'une démarche similaire si  $t < 0$  suggère la solution

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(\sqrt{4i\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i|x-y|^2/(4t)} f(y) dy, & \text{si } t \neq 0 \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}. \quad (1.12)$$

Le résultat qui suit n'est pas optimal ; il sera amélioré par la suite.

### 1.5 Proposition.

*Hypothèses.*  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ , ou, plus généralement,  $f \in L_c^2(\mathbb{R}^n)$ .  $u$  est donnée par (1.12).

*Conclusions.*

1.  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*)$  et  $iu_t + \Delta_x u = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$ .
1.  $\lim_{t \rightarrow 0} u(\cdot, t) = f$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* La première partie, par exemple pour  $t > 0$ , suit en différentiant la formule de  $u$ , et en utilisant le fait que  $iP_t + \Delta_x P = 0$ , où  $P(x, t) := \frac{1}{(\sqrt{4i\pi t})^n} e^{i|x|^2/(4t)}$ .

Pour la seconde partie, on note que pour  $t \neq 0$  fixé,  $\mathcal{F}_x(u^\varepsilon(\cdot, t)) \rightarrow g$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , où  $g(\xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{f}(\xi)$ . Le théorème de Plancherel 8.31 implique que  $u^\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow v$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , où  $\hat{v} = g$ . Comme, par ailleurs, on a  $u^\varepsilon \rightarrow u$  en tout point, on trouve  $u(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathcal{F}_x u(\cdot, t) = g$ . En appliquant à nouveau le théorème de Plancherel, on obtient 2.  $\square$

## Résolvante du laplacien

On s'intéresse ici au problème

$$\lambda w - \Delta w = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, \text{ où } \lambda > 0. \quad (1.13)$$

On peut ramener ce problème à l'équation de la chaleur en utilisant la transformée de Laplace. Plus spécifiquement, si  $u$  est solution de (1.1), alors un calcul formel montre que  $w(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x, t) dt$  vérifie (1.13).<sup>1</sup> On devine

$$w(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} f(y) dy dt = K * f(x), \quad (1.14)$$

où

$$K(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)} dt. \quad (1.15)$$

Le résultat suivant sera généralisé dans le cadre de la théorie des distributions.

### 1.6 Proposition.

*Hypothèses.*  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .  $w$  est donnée par (1.14).

*Conclusion.*  $w$  vérifie (1.13).

*Démonstration.* Par calcul direct, on a  $K \in L^1$  et  $\hat{K}(\xi) = \frac{1}{\lambda + |\xi|^2}$ . On trouve  $w \in C^\infty$  et  $\lambda w - \Delta w = K * (\lambda f - \Delta f) \in L^1$ , d'où

$$\mathcal{F}(\lambda w - \Delta w) = \hat{K} \mathcal{F}(\lambda f - \Delta f) = \hat{K}(\lambda + |\xi|^2) \hat{f} = \hat{f},$$

d'où  $\lambda w - \Delta w = f$ , par injectivité de la transformée de Fourier (Corollaire 8.29).  $\square$

## Equation de Laplace dans une boule

La formule qui suit est une application indirecte de la transformée de Fourier. On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } B(x_0, R) \\ u = f & \text{sur } S(x_0, R) \end{cases}. \quad (1.16)$$

Explication de l'origine de la formule (1.17) qui suit. On peut ramener la boule sur un demi-espace par une inversion  $\Pi$ . Une inversion est une *transformation conforme*, c'est-à-dire si  $u$  vérifie  $\Delta u = 0$ , il en va de même pour  $v = u \circ \Pi^{-1}$ . Ainsi, on ramène l'équation de Laplace dans une boule à la même équation dans un demi-espace, avec  $f \circ \Pi^{-1}$  comme donnée; l'opération au bord revient à une projection stéréographique. En utilisant (1.8) pour trouver  $v$  et en inversant la projection stéréographique, on trouve

$$u(x) = \begin{cases} \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\sigma_n R} \int_{S(x_0, R)} \frac{f(y)}{|x - y|^n} d\mathcal{H}^{n-1}(y), & \text{si } x \in B(x_0, R) \\ f(x), & \text{si } x \in S(x_0, R) \end{cases}. \quad (1.17)$$

### 1.7 Théorème (Formule de Poisson).

*Hypothèses.*  $f \in C(S(x_0, R))$ .  $u$  est donnée par (1.17).

*Conclusions.*

1.  $u \in C^\infty(B(x_0, R)) \cap C(\overline{B}(x_0, R))$ .
2.  $u$  est solution de (1.16).

1.  $w$  est la transformée de Laplace (en  $\lambda$ ) de  $u$ .

*Démonstration.* On peut supposer  $x_0 = 0$ . Soit  $v$  le membre de droite de (1.17). Soit, pour  $x \in B(0, R)$  et  $y \in S(0, R)$ ,  $P(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R |x - y|^n}$ ; c'est le *noyau de Poisson*. On pose  $S(x) =$

$$\int_{S(0, R)} P(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Les propriétés suivantes sont claires :  $\Delta_x P = 0$ ,  $\Delta S = 0$ ,  $P, S > 0$ ,  $P, S \in C^\infty$ . Par conséquent, on a  $v \in C^\infty$  et  $\Delta v = 0$ .

Par ailleurs,  $S$  ne dépend que de  $|x|$ . En effet, si  $A \in \mathcal{O}(n)$ , alors

$$S(Ax) = \frac{R^2 - |Ax|^2}{\sigma_n R} \int_{S(0, R)} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}(y)}{|Ax - y|^n} = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{S(0, R)} \frac{d\mathcal{H}^{n-1}(y)}{|x - A^{-1}y|^n} = S(x),$$

car la mesure de Hausdorff est invariante par isométries (Exercice 1.17).

Si on pose  $g(r) = S(r, 0, \dots, 0)$ , alors  $g \in C^\infty([0, R])$ . Avec  $r := |x| > 0$ , on a  $0 = \Delta S(x) = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r)$  (cf Exercice 1.18). On en déduit que  $S$  est constante. Comme  $S(0) = 1$ , on obtient  $S \equiv 1$ .

Soit  $\delta > 0$ . Si  $z \in S(0, R)$  et  $x \in B(0, R)$  sont tels que  $|x - z| < \delta/2$ , alors

$$\int_{\{y \in S(0, R) ; |y - z| > \delta\}} P(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \leq \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R} \int_{S(0, R)} (2/\delta)^n d\mathcal{H}^{n-1}(y) = C_\delta (R^2 - |x|^2).$$

Par conséquent,  $P$  satisfait  $\lim_{x \rightarrow z} \int_{|y - z| > \delta} P(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = 0$ .

Finalement, on a

$$\begin{aligned} |v(x) - g(z)| &= \left| \int_{S(0, R)} P(x, y) (g(y) - g(z)) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \right| \\ &\leq \int_{|y - z| \leq \delta} P(x, y) |g(y) - g(z)| d\mathcal{H}^{n-1}(y) + 2\|g\|_{L^\infty} \int_{|y - z| > \delta} P(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y), \end{aligned}$$

d'où

$$|v(x) - g(z)| \leq \sup_{|y - z| \leq \delta} |g(y) - g(z)| + 2\|g\|_{L^\infty} \int_{|y - z| > \delta} P(x, y) d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (1.18)$$

Si, dans (1.18), on fait d'abord  $x \rightarrow z$ , puis  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient  $\lim_{x \rightarrow z} v(x) = g(z)$ .  $\square$

## Solution fondamentale

Cette partie sera généralisée dans le cadre de la théorie des distributions; néanmoins, on le cadre des fonctions localement intégrables suffit pour comprendre l'idée.

La Définition 1.8 est motivée par le calcul formel suivant. On essaie de résoudre l'équation  $P(\partial)u = f$ , où  $P(\partial)$  est un opérateur linéaire à coefficients constants de symbole  $P(x)$ . En prenant la transformée de Fourier, on trouve formellement  $P(i\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$ , ce qui suggère  $u = E * f$  pour  $E$  tel que  $\hat{E}(\xi) = 1/P(i\xi)$ .

**1.8 Définition.** Une fonction  $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  est solution fondamentale de  $P(\partial)$  si, pour tout  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $u = E * f$  est solution de  $P(\partial)u = f$ , c'est-à-dire

$$P(\partial)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x - y)P(\partial)f(y)dy = f(x), \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.19)$$



**1.9 Proposition.**  $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  est solution fondamentale de  $P(\partial)$  si et seulement si

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(-y)P(\partial)\varphi(y)dy = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (1.20)$$

*Démonstration.* (1.20) suit de (1.19) en prenant  $f = \varphi$  et  $x = 0$ . Inversement, (1.20) appliquée à  $y \mapsto f(y+x)$  donne, après le changement de variables  $z = y+x$ , (1.19).  $\square$

**1.10 Définition.** Soit  $\sigma_n$  la mesure superficielle de la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_2} \ln|x| = \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{si } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}. \quad (1.21)$$

**1.11 Théorème.**  $E$  est une solution fondamentale de l'équation de Laplace.

*Démonstration.* En utilisant l'Exercice 1.18, on a  $\Delta E = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Par ailleurs, on a  $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , par comparaison avec les intégrales de référence (Exercice 8.41). Par convergence dominée, on a, avec  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0, \varepsilon)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(-y)\Delta\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)\Delta\varphi(y)dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} E(y)\Delta\varphi(y)dy}_{I_\varepsilon}.$$

On note que  $\partial\Omega_\varepsilon = S(0, \varepsilon)$  et  $\nu(y) = -\frac{y}{\varepsilon}$ ,  $y \in S(0, \varepsilon)$ . La deuxième formule de Green (2.2) donne

$$I_\varepsilon = -J_\varepsilon + K_\varepsilon, \text{ où } J_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{S(0, \varepsilon)} E(y)y \cdot \nabla\varphi(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad K_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_{S(0, \varepsilon)} \varphi(y)y \cdot \nabla E(y) d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Soit  $f(r) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln r, & \text{si } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$ , de sorte que  $E(y) = f(|y|)$ . D'une part, on a

$$|J_\varepsilon| \leq |S(0, \varepsilon)|f(\varepsilon)\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

D'autre part, on a  $y \cdot \nabla E(y) = \frac{1}{\sigma_n|y|^{n-2}}$ , d'ou (en utilisant l'Exercice 8.42)

$$K_\varepsilon = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S(0, 1)} \varphi(\varepsilon x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma_n} \int_{S(0, 1)} \varphi(0) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \varphi(0).$$

Finalement,  $\int_{\mathbb{R}^n} E(-y)\Delta\varphi(y)dy = \varphi(0)$ ,  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , la conclusion attendue.  $\square$

D'autres solutions fondamentales sont laissées en exercice; voir les Exercices 1.22-1.24.

## Exercices

### 1.12 Exercice. \*

*Hypothèse.*  $K$  est le noyau de la chaleur.

*Conclusion.*  $(\partial_t - \Delta_x)K(x, y, t) = 0$ ,  $t > 0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

### 1.13 Exercice.

*Hypothèses.*  $L \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$ .  $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ .  $K$  est le noyau de la chaleur.

*Conclusion.* Il existe  $a > 0$  et  $C_\alpha$  tels que  $|\partial_{(x,t)}^\alpha K(x, y, t)| \leq C_\alpha e^{-a|y|^2}$ ,  $(x, t) \in L$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ .

### 1.14 Exercice. \*

Détailler la preuve du Théorème 1.4.

### 1.15 Exercice. \*

Détailler le début de la preuve de la Proposition 1.5.

### 1.16 Exercice. \*

Détailler la preuve de la Proposition 1.6.

**1.17 Exercice.** On se propose de montrer que la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^{n-1}$  sur la sphère euclidienne  $S(0, r)$  est invariante par isométries, c'est-à-dire, si  $f : S(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  est borélienne et  $A \in \mathcal{O}(n)$ , alors

$$\int_{S(0,r)} f d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{S(0,r)} f \circ A d\mathcal{H}^{n-1}$$

au sens du théorème du changement de variables.

1. Soit  $g(x) := f(rx/|x|)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Soit  $U := \{x \in \mathbb{R}^n ; r < |x| < 2r\}$ . Montrer que, au sens du théorème de changement de variables,

$$\int_U g(x) dx = \frac{2^n - 1}{n} r \int_{S(0,r)} f d\mathcal{H}^{n-1}.$$

2. Conclure.

**1.18 Exercice. \*** Soit  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  telle que  $u(x) = g(|x|)$ ,  $\forall x$ .

1. Montrer que  $g \in C^2((0, \infty))$ .
2. Si on pose  $r = |x|$ , montrer que  $\Delta u(x) = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r)$ .

**1.19 Exercice. \*** Soit  $E$  la solution fondamentale de  $\Delta$  donnée par (1.21). Montrer que  $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  et  $\frac{x}{|x|} \cdot \nabla E(x) = \frac{1}{\sigma_n |x|^{n-1}}$  si  $x \neq 0$ .

**1.20 Exercice. \*** Dans la formule de Poisson (1.17), on considère une donnée  $f \in L^p(S(x_0, R))$ , pour un  $1 \leq p < \infty$ . On suppose, par exemple,  $x_0 = 0$  et  $R = 1$ . On pose  $u_r(x) = u(rx)$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Montrer l'analogie suivant du Théorème 1.1 2. :  $\lim_{r \nearrow 1} u_r = f$  dans  $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ .

**1.21 Exercice.** Soit  $P(\partial)$  un opérateur non constant. Montrer que l'équation  $P(\partial)u = 0$  a toujours des solutions non triviales de la forme

$$x \mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^k \zeta_j x_j\right), \text{ avec } \zeta_1, \dots, \zeta_k \in \mathbb{C} \text{ convenablement choisis.}$$

**1.22 Exercice.** \*

*Hypothèse.*  $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(x, t) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{\{(x,t) \in \mathbb{R}^2; |x| < t\}}$ .

De manière équivalente,  $E(x, t) = \frac{1}{2} H(t - |x|)$ , où  $H$  est la fonction de Heaviside,  $H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ .

*Conclusion.*  $E$  est solution fondamentale de l'équation des ondes  $1D$ ,  $\square = \partial_t^2 - \partial_x^2$ .

**1.23 Exercice.** \*

*Hypothèse.*  $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ .

*Conclusion.*  $E$  est solution fondamentale de l'équation de la chaleur  $L = \partial_t - \Delta_x$ .

**1.24 Exercice.**

*Hypothèse.*  $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} e^{i|x|^2/(4t)}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ .

*Conclusion.*  $E$  est solution fondamentale de l'équation de Schrödinger  $1D$   $S = \partial_t - i\partial_x^2$ .

**1.25 Exercice.** Nous allons expliquer ici comment obtenir, par un calcul formel, la solution fondamentale de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , donnée par (1.21).

Soit  $E_\lambda$  la solution fondamentale de  $\lambda - \Delta$  donnée par (1.15). Calculer, pour  $n \geq 3$  et  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , la limite  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} E_\lambda(x)$  et conclure.

**1.26 Exercice.** Retrouver, pour  $n \geq 3$ , « la » solution fondamentale de  $-\Delta$  en utilisant la transformée de Fourier des noyaux de Riesz  $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto |x|^{-a}$ , avec  $0 < a < n$ .

## Indications

**Exercice 1.13.**  $\partial_{(x,t)}^\alpha K$  est une combinaison linéaire de termes de la forme  $M(x, y, t) = t^r x^\beta y^\gamma e^{-|x-y|^2/(4t)}$ .

Par majoration brutale, on trouve  $|M(x, y, t)| \leq (1 + |y|)^l \exp(c|y| - b|y|^2)$ ,  $(x, t) \in K$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ , avec  $b > 0$ . Par croissance comparée, on trouve, pour tout  $a \in (0, b)$ ,  $|M(x, y, t)| \leq C \exp(-a|y|^2)$ .

**Exercice 1.21.** Montrer que tout polynôme non-constant de  $n$  variables à (beaucoup) de racines dans  $\mathbb{C}^n$ . Prendre  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$  tel que  $P(i\zeta) = 0$ .

**Exercice 1.24.** En suivant la démarche de l'Exercice 1.23, calculer une solution fondamentale de  $\partial_t - (\varepsilon + i)\partial_x^2$ , puis faire  $\varepsilon \searrow 0$ .

**Exercice 1.25.** Faire le changement de variables  $s = \frac{|x|^2}{4t}$ . Utiliser la Proposition 8.12.



# Chapitre 2

## Laplacien

Rappelons que  $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} = \operatorname{div} \nabla$ . Rappelons aussi la solution fondamentale

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & \text{si } n = 2 \\ -\frac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

$\Delta$  est le plus simple des opérateurs elliptiques (opérateurs du second ordre dont le symbole est donné par une forme quadratique définie positive). Il appartient à la fois :

1. À la famille des opérateurs de la forme  $\operatorname{div}(A(x)\nabla)$ , avec  $A(x) > 0$  pour tout  $x$  (opérateurs en forme divergence).
2. À la famille des opérateurs de la forme  $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{ij}$ , avec  $A(x) = (a_{ij}(x)) > 0$  pour tout  $x$  (opérateurs en forme non divergence).

Les opérateurs en forme divergence sont adaptés aux solutions faibles, notion développée dans la deuxième partie des notes. Les opérateurs en forme non divergence sont plus adaptés à la théorie des solutions fortes ou à celle des solutions de viscosité. Pour les solutions fortes, voir par exemple [10, Chapter 9]; un aperçu de la théorie des solutions de viscosité se trouve dans [13, Chapter 5].

**2.1 Définition.** Une fonction  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est harmonique si  $u \in C^2(\Omega)$  et  $-\Delta u = 0$ . Si on a  $-\Delta u \geq 0$  ou  $-\Delta u \leq 0$ , alors  $u$  est sur-harmonique ou sous-harmonique.

## Formules de Green

Commençons par quelques conséquences immédiates du théorème flux-divergence.

**2.2 Théorème** (Formules de Green).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$  est Lipschitz.  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ . Au moins l'un des ensembles  $\Omega$ ,  $\text{supp } u$ ,  $\text{supp } v$  est relativement compact.

*Conclusions.* On a

$$\text{(première formule de Green)} \quad \int_{\Omega} u \Delta v = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v; \quad (2.1)$$

$$\text{(deuxième formule de Green)} \quad \int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right). \quad (2.2)$$

*Démonstration.* En intégrant par parties (Corollaire 8.25), on a

$$\int_{\Omega} u \partial_{ii} v = \int_{\partial\Omega} u v_i \partial_i v - \int_{\Omega} \partial_i u \partial_i v.$$

On obtient (2.1) en sommant sur  $i$ .

(2.2) s'obtient en retranchant de (2.1) l'identité obtenue en échangeant  $u$  et  $v$  dans (2.1).  $\square$

**2.3 Corollaire.**

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $\omega \Subset \Omega$  est un ouvert Lipschitz.  $u$  est harmonique dans  $\Omega$ .

*Conclusion.* On a

$$\int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0. \quad (2.3)$$

*Démonstration.* Prendre  $v = 1$  dans la première formule de Green.  $\square$

**Formule de la moyenne****2.4 Théorème** (Formules de la moyenne pour les fonctions harmoniques).

*Hypothèses.*  $u$  est harmonique dans  $B(x, R)$  et continue dans  $\overline{B}(x, R)$ .

*Conclusions.* On a

$$u(x) = \int_{S(x, r)} u, \quad \forall 0 < r \leq R \quad (2.4)$$

et

$$u(x) = \int_{B(x, r)} u, \quad \forall 0 < r \leq R. \quad (2.5)$$

*Démonstration.* On peut supposer  $x = 0$ .

*Étape 1.* On obtient (2.4) en utilisant la deuxième formule de Green. Soit  $E$  la solution fondamentale de  $\Delta$  donnée par (1.21), de sorte que  $\Delta E = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Soient  $0 < \varepsilon < r < R$ . Sur  $\omega = B(0, r) \setminus \overline{B}(0, \varepsilon)$ , on a

$$0 = \int_{\omega} (u \Delta E - E \Delta u) = \int_{S(0, r)} \left( u \frac{x}{r} \cdot \nabla E - E \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) - \int_{S(0, \varepsilon)} \left( u \frac{x}{\varepsilon} \cdot \nabla E - E \frac{\partial u}{\partial \nu} \right). \quad (2.6)$$

Sur chaque composante de  $\partial\omega$ ,  $E$  est constante. Par ailleurs, on a  $\frac{x}{|x|} \cdot \nabla E(x) = \frac{1}{\sigma_n |x|^{n-1}}$ . En utilisant (2.3), (2.6) devient  $\int_{S(0,r)} u = \int_{S(0,\varepsilon)} u$ .

On conclut en notant que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S(0,\varepsilon)} u = u(0)$  et que le membre de droite de (2.4) est continu par rapport à  $r \in (0, R]$ .

*Étape 2. On obtient (2.5). On a*

$$\int_{B(0,r)} u = \int_0^r \int_{S(0,t)} u dt = \int_0^r \sigma_n t^{n-1} u(0) dt = \frac{\sigma_n}{n} r^n u(0) = |B(0,r)| u(0). \quad \square$$

La preuve ci-dessus combinée avec le fait que  $E$  croît avec  $|x|$  donne le résultat suivant.

### 2.5 Théorème.

*Hypothèses.*  $u$  est sous-harmonique (respectivement sur-harmonique) dans  $B(x,R)$  et continue dans  $\overline{B}(x,R)$ .

*Conclusion.* On a

$$u(x) \leq \int_{S(x,r)} u \leq \int_{B(x,r)} u, \quad \forall 0 < r \leq R, \quad (2.7)$$

respectivement

$$u(x) \geq \int_{S(x,r)} u \geq \int_{B(x,r)} u, \quad \forall 0 < r \leq R. \quad (2.8)$$

## Principes du maximum

Chaque principe du maximum se décline en trois variantes : pour des fonctions sous-, sur- et harmoniques. Nous en donnerons un de chaque sorte et laisserons au lecteur le soin de trouver les énoncés manquants.

Par ailleurs, il y a trois preuves possibles de ces principes. La première repose sur la formule de la moyenne, et rappelle les arguments d'analyse complexe. Elle est spécifique au laplacien. La deuxième découle du lemme de Hopf et s'adapte bien aux opérateurs en forme non divergence. Enfin, la troisième est basée sur des méthodes énergétiques, et va bien avec les opérateurs en forme divergence.

### 2.6 Théorème.

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  domaine.  $u$  sous-harmonique dans  $\Omega$ .  $u$  a un point de maximum.

*Conclusion.*  $u$  constante.

*Démonstration.* Soient  $M = \max u$  et  $F = \{x \in \Omega; u(x) = M\}$ .  $\Omega$  étant connexe et  $F$  étant fermé (de  $\Omega$ ) non vide, il suffit de montrer que  $F$  est ouvert. Soit  $x_0 \in F$ . Soit  $0 < R < \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ . Alors

$$M = u(x_0) \leq \int_{B(x_1,R)} \underbrace{u(x)}_{\leq M} dx \leq M.$$

On trouve  $u \equiv M$  dans  $B(x_1, R)$ , et donc  $B(x_1, R) \subset F$ . □

**2.7 Théorème.**

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné.  $u$  harmonique dans  $\Omega$ .  $u \in C(\overline{\Omega})$ .

*Conclusion.* On a

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u \leq \max_{\partial\Omega} u. \quad (2.9)$$

*Démonstration.* On établit par exemple la majoration  $u \leq \max_{\partial\Omega} u$ .

Commençons par le cas particulier où  $\Omega$  est connexe. Soit  $x_0$  un point de maximum de  $u$ . Si  $x_0 \in \partial\Omega$ , on a la conclusion voulue. Sinon,  $u$  est constante, et on a encore (2.9).

Passons au cas général. Soient  $\omega_i$ ,  $i \in I$ , les composantes connexes de  $\Omega$ . Alors

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{i \in I} \sup_{\omega_i} u \leq \sup_{i \in I} \max_{\partial\omega_i} u \leq \max_{\partial\Omega} u,$$

la dernière égalité découlant du lemme qui suit. □

**2.8 Lemme.**

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $\omega$  composante connexe de  $\Omega$ .

*Conclusion.*  $\partial\omega \subset \partial\Omega$ .

*Démonstration.* Soit  $x_0 \in \partial\omega \subset \overline{\omega} \subset \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Supposons par l'absurde que  $x_0 \notin \partial\Omega$ . Alors  $x_0 \in \Omega$ , et donc il existe  $R > 0$  tel que  $B(x_0, R) \subset \Omega$ . Comme  $x_0 \in \partial\omega$ , on a  $B(x_0, R) \cap \omega \neq \emptyset$  et  $B(x_0, R) \not\subset \omega$ . Il s'ensuit que  $\omega \cup B(x_0, R)$  est un connexe contenu dans  $\Omega$  et contenant strictement  $\omega$ . Impossible, car  $\omega$  est une composante connexe. □

**2.9 Théorème (Lemme de Hopf).**

*Hypothèses.*  $B$  boule.  $x_0 \in \partial B$ .  $u$  sur-harmonique dans  $B$ .  $u \in C^1(\overline{B})$ .  $u > u(x_0)$  dans  $B$ .  $v$  la normale extérieure à  $B$  en  $x_0$ .

*Conclusion.*  $\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) < 0$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $B = B(0, R)$  et  $u(x_0) = 0$ . Soient, avec  $\varepsilon > 0$  et  $a > 0$  à fixer,  $v(x) = e^{-a|x|^2} - e^{-aR^2}$  et  $w = u - \varepsilon v$ . Soit  $\omega = B(0, R) \setminus \overline{B}(0, R/2)$ .

Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, alors  $w \geq 0$  sur  $\partial\omega$ . Ici, on utilise  $u \geq 0$  et  $v = 0$  sur  $S(0, R)$  et  $u > 0$  sur  $S(0, R/2)$ .

Par ailleurs, on a (Exercice 1.18)  $\Delta v(x) = 2a(2a|x|^2 - n)e^{-a|x|^2}$ , d'où  $\Delta v \geq 0$  dans  $\omega$  si  $a$  est suffisamment grand. On trouve  $-\Delta(u - \varepsilon v) \geq 0$  pour un tel  $a$ .

Donc, pour  $\varepsilon$  et  $a$  convenables,  $w(x_0) = 0$ ,  $w$  est sur-harmonique dans  $\omega$  et  $w \geq 0$  sur  $\partial\omega$ . Par le principe du maximum, on a  $w \geq 0$  dans  $\omega$ , d'où  $x_0$  est un point de minimum global de  $w$  dans  $\overline{\omega}$ . Ceci entraîne  $\frac{\partial w}{\partial v}(x_0) \leq 0$ . On obtient  $\frac{\partial u}{\partial v}(x_0) \leq \varepsilon \frac{\partial v}{\partial v}(x_0) = -2\varepsilon a R e^{-aR^2} < 0$ . □

On peut montrer que le lemme de Hopf implique le principe du maximum (Exercice 2.25). Ceci peut paraître un cercle vicieux, sauf qu'il y a moyen de prouver le lemme de Hopf sans passer par le principe du maximum (en utilisant l'Exercice 2.26).

Montrons maintenant un résultat plus faible que le théorème 2.7, dont l'intérêt réside dans la preuve, bien adaptée aux solutions faibles.

**2.10 Proposition.**

*Hypothèses.*  $\Omega$  borné lipschitzien.  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ .  $-\Delta u \leq 0$  dans  $\Omega$ .  $u \leq 0$  sur  $\partial\Omega$ .

*Conclusion.*  $u \leq 0$  dans  $\Omega$ .



*Démonstration.* Soit  $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$  telle que  $\Phi(t) = 0$  si  $t \leq 0$  et  $\Phi'(t) > 0$  si  $t > 0$ . Par exemple,  $\Phi(t) = (t_+)^2$  convient. On multiplie l'inégalité  $-\Delta u \leq 0$  par  $\Phi(u)$  et on intègre dans  $\Omega$ . En utilisant la première formule de Green et le fait que  $u \leq 0$  sur  $\partial\Omega$ , on trouve  $\int_{\Omega} \Phi'(u)|\nabla u|^2 \leq 0$ , d'où  $\Phi'(u)\nabla u = 0$ , ou encore  $\nabla(\Phi(u)) = 0$ . On trouve  $\Phi(u)$  constante. Comme  $\Phi(u) = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on obtient  $\Phi(u) = 0$  (Exercice 2.20), d'où  $u \leq 0$ .  $\square$

## Problème de Dirichlet

Le problème de Dirichlet est

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.10)$$

Une solution (classique) de (2.10) est  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  vérifiant ce problème. On suppose satisfaites les conditions de compatibilité  $f \in C(\Omega)$  et  $g \in C(\partial\Omega)$ .

Nous allons évoquer ici plusieurs aspects.

1. Une stratégie pour résoudre (2.10), en minimisant une fonctionnelle (principe de Dirichlet). Ce principe va nous mener plus tard aux solutions faibles.
2. Un contre-exemple célèbre (dû à Weierstrass) montrant l'impossibilité de résoudre (2.10) en général, et donc l'invalidité du principe de Dirichlet.
3. L'unicité et les estimations a priori pour ce problème.
4. L'existence d'une solution du problème de Dirichlet si  $f = 0$  et  $\Omega$  est suffisamment régulier. Ce résultat est pour l'essentiel dû à Poincaré, mais la présentation "moderne" donnée ici est postérieure, et due à Perron.

### 2.11 Proposition (Principe de Dirichlet).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné.  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  solution classique de (2.10).

*Conclusion.*  $u$  est l'unique point de minimum de

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v ; v \in C^2(\overline{\Omega}), v = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}. \quad (2.11)$$

*Démonstration.* Soit  $v \in C^2(\overline{\Omega})$  telle que  $v = g$  sur  $\partial\Omega$ . Soit  $w = v - u$ . La première formule de Green donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} f u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla w - \int_{\Omega} f w \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} f u + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla w|^2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Omega} f v \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} f u,$$

avec égalité si et seulement si  $w$  est localement constante. Comme  $w = 0$  sur  $\partial\Omega$ , si  $w$  est localement constante alors on trouve  $w = 0$ , d'où  $u = v$  (Exercice 2.20).  $\square$

En général, le problème (2.10) n'a pas de solution. Il y a deux obstructions à cela. L'une vient de la régularité de  $f$ . L'autre de la régularité de  $\Omega$ .

**2.12 Proposition** (L'exemple de Weierstrass).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $n \geq 2$ .

*Conclusion.* Il existe  $f \in C(\overline{\Omega})$  tel que l'équation  $-\Delta u = f$  n'ait pas de solution  $u \in C^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* On peut supposer que  $0 \in \Omega$ . Soit  $v$  la fonction de l'Exercice 2.21. Soit  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x) = \begin{cases} (x_2^2 - x_1^2) |\ln |x||^\alpha, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ , avec  $\alpha \in (0, 1)$ . Soit  $f_0 = -\Delta v$ , fonction définie si  $x \neq 0$ .

Alors  $v \in C(\mathbb{R}^n)$  et  $f_0$  se prolonge par continuité avec la valeur 0 si  $x = 0$  (Exercice 2.21). Soit  $f$  le prolongement continu de  $f_0$  à  $\overline{\Omega}$ . Alors il n'existe pas de  $u \in C^2(\Omega)$  telle que  $-\Delta u = f$ . Preuve par l'absurde : on a  $\Delta(u - v) = 0$  dans  $\Omega \setminus \{0\}$  et  $u - v \in C(\Omega)$ , d'où  $u - v \in C^\infty(\Omega)$  (principe des singularités artificielles, Exercice 2.22), et en particulier  $v \in C^2$ . Or  $v \notin C^2$  (Exercice 2.21).  $\square$

**2.13 Proposition** (Estimation a priori pour le problème de Dirichlet).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$  borné.  $u$  solution de (2.10).

*Conclusion.* On a

$$|u| \leq \max_{\partial\Omega} |g| + C(\Omega) \sup_{\Omega} |f|. \quad (2.12)$$

*Démonstration.* On peut supposer  $f$  bornée. Soit  $a = \max_{x \in \overline{\Omega}} x_1^2$ . Soit

$$v(x) = \max_{\partial\Omega} |g| + \left( \sup_{\Omega} |f| \right) \frac{a - x_1^2}{2}.$$

Alors  $u \leq v$  dans  $\overline{\Omega}$ , par le principe du maximum appliqué à  $u - v$ . De même,  $u \geq -v$ . On obtient (2.12) avec  $C(\Omega) = a/2$ .  $\square$

**2.14 Corollaire.**

*Hypothèse.*  $\Omega$  borné.

*Conclusion.* Le problème (2.10) a au plus une solution.

On est maintenant en position de donner un deuxième type de contre-exemple à l'existence.

**2.15 Proposition** (L'exemple de Zaremba).

*Hypothèses.*  $n \geq 2$ ,  $\Omega = B(0, 1) \setminus \{0\}$ ,  $f = 0$ ,  $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| = 1 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ .

*Conclusion.* Pour ces choix, (2.10) n'a pas de solution.

*Démonstration.* Par le principe du maximum, on a  $0 \leq u \leq 1$ . Par le principe des singularités artificielles Exercice 2.22,  $u$  est harmonique dans  $B(0, 1)$ . Par unicité de la solution du problème de Dirichlet dans  $B(0, 1)$ , on a  $u = 0$ , ce qui contredit  $u(0) = 1$ .  $\square$

Les exemples de Weierstrass et de de Zaremba décrivent les obstructions canoniques à l'existence de la solution du (2.10). Dès que l'on suppose  $f$  et  $\Omega$  suffisamment réguliers, il y a une solution. Un résultat typique est le suivant.

**2.16 Théorème** (Poincaré).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est borné lipschitzien.  $g \in C(\partial\Omega)$ .

*Conclusion.* Le problème de Dirichlet homogène  $\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$  a une solution  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

*Idée de la preuve.* Si  $u$  est solution du problème et si  $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  est sous-harmonique et telle que  $v \leq g$  sur  $\partial\Omega$ , alors  $v \leq u$  dans  $\Omega$ , par le principe du maximum. Cette inégalité devient égalité si  $v = u$ , ce qui implique (si (2.10) a une solution)

$$u = \sup\{v; v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ sous-harmonique et } v \leq g \text{ sur } \partial\Omega\}. \quad (2.13)$$

L'idée de Perron est de définir  $u$  comme le membre de droite de (2.13).

Par la suite, la preuve se fait en deux temps :

1. On montre que  $u$  est harmonique dans  $\Omega$ . Ceci ne suppose aucune régularité de  $\Omega$ . L'ingrédient essentiel de la preuve est la possibilité de résoudre le problème de Dirichlet dans une boule (Théorème 1.7).

De ce qui précède,  $u$  est la solution de (2.10), si cette solution existe.

2. On montre que, si  $\Omega$  est Lipschitz, alors  $u \in C(\bar{\Omega})$  et  $u = g$  sur  $\partial\Omega$ . Ceci repose uniquement sur le principe du maximum et le fait que les ouverts lipschitziens ont la propriété du cône extérieur (Proposition 8.19).  $\square$

En règle générale, plus les données du problème sont régulières, plus la solution finale l'est. Le cas le plus favorable est décrit par le théorème suivant.

**2.17 Théorème** (Kellogg).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné, de classe  $C^\infty$ .  $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ .  $g \in C^\infty(\partial\Omega)$ .

*Conclusion.* La solution  $u$  de (2.10) est de classe  $C^\infty(\bar{\Omega})$ .

Contrairement au théorème de Poincaré, le théorème de Kellogg n'a pas de preuve complètement élémentaire. Le moyen le plus économique de montrer ce résultat est de passer par la régularité des solutions faibles; nous y reviendrons plus tard.

## Problème de Neumann

Le problème de Neumann est

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \quad (2.14)$$

Ici, on suppose  $\Omega$  au moins Lipschitz, de sorte que la normale extérieure à  $\partial\Omega$ ,  $\nu$ , soit définie p. p. Si on suppose un peu plus de régularité, par exemple  $\Omega \in C^1$ , alors une solution (classique) de (2.14) est  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  vérifiant ce problème. On suppose satisfaites les conditions de compatibilité  $f \in C(\Omega)$  et  $g \in C(\partial\Omega)$ .

Il est plus difficile de donner des résultats d'existence des solutions classiques de (2.14). Le problème (2.14) sera traité naturellement dans le cadre des solutions faibles. Pour ce qui est des solutions classiques, on va se contenter de l'unicité. Voyons deux méthodes, la première basée sur le principe du maximum et adaptée aux opérateurs en forme non divergence, l'autre sur la méthode d'énergie et adaptée aux opérateurs en forme divergence.

**2.18 Proposition** (Unicité de la solution du problème de Neumann via le lemme de Hopf).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est connexe, borné et  $C^2$ .  $u$  est solution classique du problème de Neumann homogène.

*Conclusion.*  $u$  est constante.

*Démonstration.* Si  $u$  a un point de minimum dans  $\Omega$ , la conclusion est claire. Sinon, soit  $x_0 \in \partial\Omega$  un point de minimum de  $u$ , de sorte que  $u(x) > u(x_0)$ ,  $x \in \Omega$ . Comme  $\Omega \in C^2$ ,  $\Omega$  a la propriété de la boule intérieure : il existe une boule  $B$  telle que  $B \subset \Omega$  et  $x_0 \in \partial B$  (Proposition 8.19). Le lemme de Hopf implique  $\frac{\partial u}{\partial \nu} u(x_0) < 0$ , contradiction.  $\square$

**2.19 Proposition** (Unicité de la solution du problème de Neumann via l'énergie).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est connexe, borné et lipschitzien.  $u \in C^2(\overline{\Omega})$  solution du problème de Neumann homogène.

*Conclusion.*  $u$  est constante.

*Démonstration.* On multiplie l'équation de  $u$  par  $u$  et on utilise la première formule de Green pour trouver  $\nabla u = 0$ , d'où  $u$  constante.  $\square$

## Exercices

**2.20 Exercice.**

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ .  $u \in C(\overline{\Omega})$ .  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ .  $u$  localement constante dans  $\Omega$ .

*Conclusion.*  $u = 0$ .

**2.21 Exercice.** \* Soit  $n \geq 2$ . Soit  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v(x) = (x_2^2 - x_1^2) |\ln(x_1^2 + x_2^2)|^\alpha$  si  $x \neq 0$ , avec  $\alpha \in (0, 1)$ , prolongée par continuité en 0. Montrer que :

1.  $v \in C \setminus C^2$ .
2.  $\Delta v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  se prolonge par continuité en 0.

**2.22 Exercice** (Principe des singularités artificielles).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $x_0 \in \Omega$ .  $u$  harmonique dans  $\Omega \setminus \{x_0\}$ .  $u$  bornée au voisinage de  $x_0$ .

*Conclusions.*  $u$  admet un prolongement par continuité en  $x_0$ . Le prolongement est harmonique dans  $\Omega$ .

**2.23 Exercice** (Problèmes en présence de symétries). \*

1. Soit  $R \in \mathcal{O}(n)$ . Montrer que  $\Delta(u \circ R) = (\Delta u) \circ R$ .
2. Soit  $\Omega = B(0, R)$  ou  $\Omega = B(0, R) \setminus \overline{B}(0, \rho)$ , où  $0 < \rho < R$ . Montrer que si  $f$  et  $g$  ne dépendent que de  $|x|$ , alors les solutions des problèmes de Dirichlet (2.10) et de Neumann (2.14) ne dépendent que de  $|x|$ .
3. Application. Calculer la capacité de la boule  $K = \overline{B}(0, \rho)$  dans la boule  $U = B(0, R)$  :

$$\text{cap}(K; \Omega) := \inf \left\{ \int_U |\nabla u|^2; u \in C^2(\overline{U}), u = 0 \text{ sur } \partial U, u = 1 \text{ sur } K \right\}.$$

**2.24 Exercice.** \* Montrer que le principe du maximum Théorème 2.7 et ses corollaires sont faux si  $\Omega$  est un demi-espace.

**2.25 Exercice** (Preuve du principe du maximum en utilisant le lemme de Hopf).

1. Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert connexe et  $F$  un ouvert de  $\Omega$ , non vide et différent de  $\Omega$ . Montrer qu'il existe une boule  $B$  telle que  $B \subset \Omega \setminus F$  et  $\overline{B} \cap F \neq \emptyset$ .
2. En déduire que si  $u$  est sur-harmonique dans  $\Omega$  et a un point de minimum dans  $\Omega$ , alors  $u$  est constante.

**2.26 Exercice.**

*Hypothèses.*  $u \in C^2(\Omega)$ .  $-\Delta u > 0$  dans  $\Omega$ .

*Conclusion.*  $u$  n'a pas de point de minimum local dans  $\Omega$ .

**2.27 Exercice.** \* Utiliser l'exercice précédent pour prouver le lemme de Hopf.

## Indications

**Exercice 2.20.** Si  $\Omega$  est connexe, alors  $u$  est constante dans  $\Omega$  (une fonction localement constante dans un ensemble connexe est constante). Soit  $C$  la valeur de cette constante. Si  $x \in \partial\Omega$ , alors il existe  $(x_j) \subset \Omega$  telle que  $x_j \rightarrow x$ . On trouve  $C = 0$ . Si  $\Omega$  n'est pas connexe, utiliser le Lemme 2.8.

**Exercice 2.22.** On peut supposer  $x_0 = 0$ . Soient  $0 < R < \text{dist}(0, \partial\Omega)$ ,  $g = u|_{S(0,R)}$  et  $v$  la solution du problème de Dirichlet  $\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{dans } B(0,R) \\ v = g & \text{sur } S(0,R) \end{cases}$ . Il suffit de montrer que  $u = v$  dans  $B(0,R)$ .

Soient  $x_0 \in S(0,R)$ ,  $E$  la solution fondamentale de  $\Delta$  et  $w_\varepsilon(x) = v(x) - u(x) - \varepsilon(E(x) - E(x_0))$ . Alors  $w_\varepsilon \geq 0$  sur  $S(0,\rho)$  pour  $\rho \leq \rho_0$ , avec  $\rho_0$  suffisamment petit (dépendant de  $\varepsilon$ ). Par le principe du maximum,  $w_\varepsilon \geq 0$  dans  $B(0,R) \setminus \{0\}$ . On obtient  $v \geq u$ , et de même  $v \leq u$ .

**Exercice 2.25.**

1. Soient  $x_0 \in \Omega \setminus F$  et  $x_1 \in F$ .  $\Omega$  étant connexe, il est connexe par arcs. Soit  $\gamma \subset \Omega$  un arc connectant  $x_0$  à  $x_1$ . En considérant la fonction continue

$$[0, 1] \ni t \mapsto f(t) = \frac{\text{dist}(\gamma(t), F)}{\text{dist}(\gamma(t), \partial\Omega)},$$

montrer qu'il existe un  $t \in [0, 1]$  tel que  $0 < f(t) < 1$ . En déduire que  $B = B(\gamma(t), \text{dist}(\gamma(t), F))$  convient.

2. Si, par l'absurde,  $u$  n'est pas constante, soient  $m = \min u$  et  $F = \{x \in \Omega; u(x) = m\}$ . En appliquant le lemme de Hopf à  $u$  dans  $B$ , on trouve un point  $x_0 \in F$  et un  $\nu$  tel que  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0$ , d'où  $m$  n'est pas le minimum de  $u$ .

**Exercice 2.26.** En un point de minimum local, la matrice hessienne de  $u$  est positive. Donc la trace de la hessienne est positive.

## Commentaires

Le problème de Dirichlet a fasciné les analystes dès le 19<sup>e</sup> siècle, et sa résolution satisfaisante a pris du temps : des travaux de Green en 1828 aux résultats les plus récents de régularité, au début des années 1970. Concernant l'histoire ancienne (jusqu'aux années 1920), la monographie de Kellogg [15, pp. 277-286] est une excellente source.

La preuve du théorème de Poincaré 2.16 est bien expliquée dans [10, Section 2.8 et Exercice 2.12].

La théorie des solutions classiques du problème de Neumann est l'une des grandes réussites de la théorie du potentiel. La monographie [15] est le grand classique de cette théorie. Pour une théorie moderne du potentiel, voir par exemple [16].

# Chapitre 3

## Chaleur

Rappelons que l'opérateur de la chaleur est donné par  $Lu = u_t - \Delta_x u$ , où  $u = u(x, t)$ . Rappelons aussi la solution fondamentale

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

### Formule de Goursat

La formule qui suit est l'analogue, pour l'équation de la chaleur, de la deuxième formule de Green.

#### 3.1 Proposition (Formule de Goursat).

*Hypothèses.*  $U \square \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  est lipschitzien.  $u = u(x, t), v = v(x, t)$  sont de classe  $C^2$  dans  $\bar{U}$ . Au moins l'un des  $U$ ,  $\text{supp } u$  et  $\text{supp } v$  est relativement compact.

*Conclusion.* On a

$$\int_U [u(\partial_t v + \Delta_x v) + v(\partial_t u - \Delta_x u)] = \int_{\partial U} \left[ uvv_t + \left( u \frac{\partial v}{\partial v_x} - v \frac{\partial u}{\partial v_x} \right) \right]. \quad (3.1)$$

Ici, on a écrit  $v = (v_x, v_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

*Démonstration.* On a  $u(\partial_t v + \Delta_x v) + v(\partial_t u - \Delta_x u) = \text{div}_{(x,t)} F$ , où  $F(x, t) = (u \nabla_x v - v \nabla_x u, uv)$ . Pour conclure, on applique, à cette identité, le théorème flux-divergence.  $\square$

#### 3.2 Corollaire.

*Hypothèses.*  $U \square \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .  $\omega \Subset U$  est un ouvert lipschitzien.  $u \in C^2(U)$  vérifie  $Lu = 0$  dans  $U$ .

*Conclusion.* On a

$$\int_{\partial \omega} uv_t = \int_{\partial \omega} \frac{\partial u}{\partial v_x}. \quad (3.2)$$

*Démonstration.* On prend  $v = 1$  dans la formule de Goursat.  $\square$

## Formule de la moyenne

Dans cette partie, nous allons établir le Théorème 3.5 qui est l'analogue, pour l'équation de la chaleur, de la formule de la moyenne pour l'équation de Laplace.

**3.3 Définition.** On définit la boule (fermée) parabolique de rayon  $r$  par

$$B(x, t; r) = \{(y, s); s \leq t \text{ et } E(x - y, t - s) \geq 1/r^n\} = \{(y, s); E(x - y, t - s) \geq 1/r^n\}.$$

L'intérieur de la boule est noté  $\mathring{B}(x, t; r)$ . La sphère parabolique est le bord de la boule parabolique :

$$S(x, t; r) = \{(y, s); s \leq t \text{ et } E(x - y, t - s) = 1/r^n\}.$$

**3.4 Remarque.** Le changement d'échelle naturel pour l'équation de la chaleur est  $(x, t) \mapsto U_r(x, t) := (rx, r^2t)$ . En effet, on a  $L[u(rx, r^2t)] = r^2[Lu](rx, r^2t)$ , c'est-à-dire  $L[u \circ U_r](x, t) = r^2[Lu] \circ U_r$ . De ce point de vue,  $U_r$  joue, pour l'équation de la chaleur, le même rôle que l'homothétie  $x \mapsto V(rx) = rx$  pour l'équation de Laplace ; cette homothétie satisfait  $\Delta[u \circ V_r] = r^2[\Delta u] \circ V_r$ . En outre, on a  $B(0, 0; r) = U_r(B(0, 0; 1))$ , alors que les boules euclidiennes standard vérifient  $B(0, r) = V_r(B(0, 1))$ . Les boules paraboliques ont donc "la bonne homogénéité".

**3.5 Théorème** (Formules de la moyenne pour l'équation de la chaleur).

*Hypothèses.*  $U \square \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .  $B(x, t; R) \subset U$ .  $u \in C^2(U)$  vérifie  $Lu = 0$  dans  $U$ .

*Conclusions.* On a

$$\begin{aligned} u(x, t) &= - \int_{S(x, t; r)} \frac{\partial_y E(x - y, t - s)}{\partial \nu_y} u(y, s) d\mathcal{H}^n(y, s) \\ &= \int_{S(x, t; r)} \frac{r^{-2n} |y - x|^2}{4(t - s)^2 |\nabla E(y, -s)|} u(y, s) d\mathcal{H}^n(y, s), \quad \forall 0 < r \leq R \\ &= \frac{\int_{S(x, t; r)} \frac{r^{-2n} |y - x|^2}{4(t - s)^2 |\nabla E(y, -s)|} u(y, s) d\mathcal{H}^n(y, s)}{\int_{S(x, t; r)} \frac{r^{-2n} |y - x|^2}{4(t - s)^2 |\nabla E(y, -s)|} d\mathcal{H}^n(y, s)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

et

$$u(x, t) = \frac{1}{4R^n} \int_{B(x, t; R)} \frac{|y - x|^2}{(t - s)^2} u(y, s) dy ds = \frac{\int_{B(x, t; R)} \frac{|y - x|^2}{(t - s)^2} u(y, s) dy ds}{\int_{B(x, t; R)} \frac{|y - x|^2}{(t - s)^2} dy ds}. \quad (3.4)$$

*Variante :* les formules (3.5) et (3.3) restent valables sous les hypothèses plus faibles suivantes :  $u \in C(B(x, t; R))$ ,  $u \in C^2$  et  $Lu = 0$  à l'intérieur de  $B(x, t; R)$ .

*Démonstration.* La preuve du théorème est similaire à celle du Théorème 2.4 ; on utilise la formule de Goursat à la place de la deuxième formule de Green.

On peut supposer  $x = 0$ ,  $t = 0$ .

*Étape 1.* On établit (3.3) en utilisant la formule de Goursat. Soit  $F(y, s) = E(-y, -s) = E(y, -s)$ . A partir de  $LE = 0$  si  $t > 0$  on obtient  $\partial_s F + \Delta_y F = 0$  si  $s < 0$ .



Soit, pour  $c > 0$ ,  $U_c = S(0, 0; c^{-1/n})$ . On a  $U_c = F^{-1}(\{c\})$ . Soit  $\nu$  la normale extérieure à  $B(0, 0; c^{-1/n})$ , que l'on écrit comme  $\nu = (\nu_y, \nu_s)$ . Si on pose  $\xi := ((2ns + |y|^2)^2 + 4s^2|y|^2)^{1/2}$ , on vérifie aisément les identités

$$\nu_y = \frac{2sy}{\xi}, \quad |\nabla F| = \frac{\xi}{4s^2} F, \quad -\frac{\partial_y F(y, s)}{\partial \nu_y} = \frac{c|y|^2}{\xi} = \frac{c^2|y|^2}{4s^2|\nabla F|}, \quad \forall (y, s) \in U_c. \quad (3.5)$$

La première égalité de (3.3) revient à

$$u(0, 0) = - \int_{U_c} \frac{\partial_y F(y, s)}{\partial \nu_y} u(y, s). \quad (3.6)$$

Pour obtenir (3.6), l'idée est d'utiliser (3.1) avec  $\Omega = B(0, 0; c^{-1/n})$  et  $v = F$ . Ceci est impossible directement, car  $F$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ . On procède par approximation : si  $\varepsilon > 0$  est suffisamment petit, alors l'ensemble

$$\Omega_\varepsilon = \{(y, s) \in \dot{B}(0, 0; c^{-1/n}); s < -\varepsilon\}$$

est Lipschitz, de bord  $U_c^\varepsilon \sqcup I_c^\varepsilon$ , où

$$U_c^\varepsilon = U_c \cap [s \leq -\varepsilon], \quad I_c^\varepsilon = B(0, r_c^\varepsilon) \times \{-\varepsilon\};$$

ici,  $r_c^\varepsilon = c^{-1/n}[-2nc^{2/n}\varepsilon \ln(4\pi c^{2/n}\varepsilon)]^{1/2}$  (d'après l'Exercice 3.24). La formule de Goursat (3.1) appliquée dans  $\Omega_\varepsilon$  donne

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[ uF\nu_s + \left( u \frac{\partial F}{\partial \nu_y} - F \frac{\partial u}{\partial \nu_y} \right) \right] = 0. \quad (3.7)$$

Clairement, on a  $\nu_s = 1$  et  $\nu_y = 0$  sur  $I_c^\varepsilon$ .

Soit  $P$  la gaussienne standard,  $P(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/4}$ , qui vérifie  $\int P = 1$ . En notant que  $F(y, -\varepsilon) = P_{\sqrt{\varepsilon}}(y)$ , et en utilisant le fait que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r_c^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \infty$ , la Proposition 8.8 et l'Exercice 8.39, on trouve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I_c^\varepsilon} uF\nu_s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I_c^\varepsilon} uF = u(0, 0). \quad (3.8)$$

Comme  $F = c$  sur  $U_c$ , on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_c^\varepsilon} \left[ uF\nu_s - F \frac{\partial u}{\partial \nu_y} \right] = c \int_{U_c} \left[ u\nu_s - \frac{\partial u}{\partial \nu_y} \right] = 0, \quad (3.9)$$

en utilisant (3.2).

Enfin,  $\frac{\partial F}{\partial \nu_y}$  étant intégrable sur  $U_c$  (Exercice 3.25), on trouve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{U_c^\varepsilon} u \frac{\partial F}{\partial \nu_y} = \int_{U_c} u \frac{\partial F}{\partial \nu_y}. \quad (3.10)$$

On obtient (3.6) en combinant (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10).

La deuxième égalité de (3.3) suit de la première et de (3.5). En prenant  $u \equiv 1$  dans (3.3), on obtient que le dénominateur de la dernière ligne de (3.3) vaut 1.

Étape 2. On obtient (3.4) en utilisant la formule de la co-aire Théorème 8.23. On a

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{4R^n} \int_{1/R^n}^{\infty} \frac{4u(0,0)}{c^2} dc = \frac{1}{4R^n} \int_{1/R^n}^{\infty} \int_{U(0,0;c)} \frac{|y|^2}{s^2 |\nabla F|} u(y,s) d\mathcal{H}^n(y,s) dc \\ &= \frac{1}{4R^n} \int_{[F \geq 1/R^n]} \frac{|y|^2}{s^2} u(y,s) dy ds = \frac{1}{4R^n} \int_{B(x,t;R)} \frac{|y|^2}{s^2} u(y,s) dy ds. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La deuxième égalité ci-dessus repose sur la dernière identité de (3.5); la troisième suit de la formule de la co-aire.

La deuxième égalité dans (3.4) s'obtient en prenant  $u \equiv 1$  dans la première égalité de (3.4).

Étape 3. Preuve de la variante. L'identité (3.4) suit toujours de (3.3) en utilisant la formule de la co-aire. Pour obtenir (3.3) on applique, avec  $0 < \delta < R$  fixé, la formule (3.3) pour exprimer  $u(x-\varepsilon, t)$  en fonction des valeurs de  $u$  sur  $S(x-\varepsilon t; R-\delta)$ . On fait ensuite  $\varepsilon \searrow 0$ , puis  $\delta \searrow 0$ .  $\square$

### 3.6 Corollaire.

*Hypothèses.*  $B(x, t; r) \subset U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .  $u \in C^2(U)$  vérifie  $Lu = 0$  dans  $U$ .

*Conclusion.* On a

$$\min_{B(x,t;r)} u \leq u(x, t) \leq \max_{B(x,t;r)} u, \quad (3.12)$$

avec égalité si et seulement si  $u$  est constante dans  $B(x, t; r)$ .

## Principes du maximum

**3.7 Définition.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $-\infty < a < b < \infty$ . La frontière parabolique de l'ouvert  $\Omega \times (a, b)$  est

$$\Gamma = (\Omega \times \{a\}) \cup (\partial\Omega \times [a, b]).$$

Si  $a = 0$ ,  $b = T$ , la frontière parabolique est notée  $\Gamma_T$ .

On pose aussi  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ ; c'est le cylindre parabolique de hauteur  $T$ . On définit de même le cylindre fermé  $\overline{\Omega}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$ .

### 3.8 Théorème (Principe du maximum).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est borné.  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ .  $u$  vérifie  $Lu = 0$  dans  $\Omega_T$ .

*Conclusion.*

$$\min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\Gamma_T} u \quad \text{et} \quad \max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u. \quad (3.13)$$

*Variantes :*

1. Si  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$  et  $Lu \leq 0$  dans  $\Omega_T$ , alors  $\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$ .

2. Si  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$  et  $Lu \geq 0$  dans  $\Omega_T$ , alors  $\min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\Gamma_T} u$ .

*Démonstration.* On traite le cas du maximum. On suppose d'abord

$$u \in C^2(\overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T). \quad (3.14)$$

Soit  $v_\varepsilon(x, t) = u(x, t) - \varepsilon t$ , où  $\varepsilon > 0$ .

*Étape 1.* On montre que

$$v_\varepsilon \text{ n'a pas de point de maximum en dehors de } \Gamma_T. \quad (3.15)$$

Preuve par l'absurde. Soit  $(x_0, t_0)$  point de maximum de  $v_\varepsilon$  dans  $\overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$ . En particulier, à  $x_0$  fixé,  $t_0 > 0$  est point de maximum de  $v_\varepsilon$  par rapport à  $t \in [0, t_0]$ , d'où  $\partial_t v_\varepsilon(x_0, t_0) \geq 0$ .

De même, à  $t_0$  fixé,  $x_0$  est point de maximum de  $v_\varepsilon$  par rapport à  $x$ , d'où  $\nabla_x v_\varepsilon(x_0, t_0) = 0$  et l'hessienne partielle de  $v_\varepsilon$  par rapport à  $x$  est négative. En particulier, la trace de l'hessienne est négative, c'est-à-dire  $\Delta_x v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$ .

On trouve la contradiction

$$-\varepsilon = Lv_\varepsilon(x_0, t_0) = \partial_t v_\varepsilon(x_0, t_0) - \Delta_x v_\varepsilon(x_0, t_0) \geq 0.$$

*Étape 2. Conclusion.* Sous l'hypothèse (3.14), on a, d'après l'étape précédente,

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v_\varepsilon \leq \max_{\Gamma_T} v_\varepsilon \leq \max_{\Gamma_T} u. \quad (3.16)$$

La conclusion du théorème (en supposant (3.14)) s'obtient en faisant  $\varepsilon \nearrow 0$  dans (3.16).

Le cas général : on applique le cas précédent sur  $\Omega_S$ , avec  $0 < S < T$ , puis on fait  $S \nearrow T$ .

La preuve des variantes est similaire.  $\square$

### 3.9 Corollaire.

*Hypothèses.*  $\Omega \square \mathbb{R}^n$  borné.  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$  solution de  $\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega_T \\ u = g & \text{sur } \Gamma_T \end{cases}$ .

*Conclusion.*  $|u| \leq T \sup |f| + \max |g|$ .

En particulier, le problème  $\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega_T \\ u = g & \text{sur } \Gamma_T \end{cases}$  a au plus une solution  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ .

*Démonstration.* Soit  $v(x, t) = u(x, t) - \max |g| - t \sup |f|$ . On a  $Lv \leq 0$  dans  $\Omega_T$  et  $v \leq 0$  sur  $\Gamma_T$ , d'où  $v \leq 0$ . On obtient  $v \leq 0$  dans  $\overline{\Omega}_T$ . De même,  $u(x, t) + \max |g| + t \sup |f| \geq 0$  dans  $\overline{\Omega}_T$ . On trouve

$$|u(x, t)| \leq \max |g| + t \sup |f| \leq T \sup |f| + \max |g|. \quad \square$$

### 3.10 Théorème (Principe du maximum rétrograde).

*Hypothèses.*  $\Omega \square \mathbb{R}^n$  ouvert borné et connexe.  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$  vérifie  $Lu = 0$  dans  $\Omega_T$ .  $(x, t) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$  est un point d'extrémum de  $u$ .

*Conclusion.*  $u$  est constante sur  $\overline{\Omega}_t$ .

*Démonstration.* On traite le cas d'un point de maximum. Soit  $M$  le maximum de  $u$ . Un segment  $I \subset \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$  d'extrémités  $(x_0, t_0)$  et  $(x_1, t_1)$  est appelé intervalle descendant si  $t_0 > t_1$ .

*Étape 1.* Si  $I$  est descendant et si  $u(x_0, t_0) = M$ , alors  $u \equiv M$  sur  $I$ . En effet, soit

$$\tau := \inf\{\sigma \in [t_1, t_0]; u(y, s) = M, \forall (y, s) \in I \text{ avec } s \in [\sigma, t_0]\}.$$

Si  $\tau = t_1$ , on a fini. Sinon, on va aboutir à une contradiction. Soit  $z \in \Omega$  tel que  $(z, \tau) \in I$ . Soit  $r > 0$  tel que  $B(z, \tau; r) \subset \Omega_T$ . Le Théorème 3.5 donne  $u \equiv M$  dans  $B(z, \tau; r)$ . Comme  $I \cap B(z, \tau; r)$  est un intervalle non dégénéré<sup>1</sup>, ceci contredit la minimalité de  $\tau$ .

*Étape 2.*  $u$  est constante dans  $\Omega \times (0, t)$ . Au passage, ceci achève la preuve, car par continuité on a alors  $u \equiv M$  dans  $\overline{\Omega} \times [0, t]$ .

Soit  $(y, s) \in \Omega \times [0, t)$ .  $\Omega$  étant connexe, il est connexe par lignes polygonales : il existe  $I_1, \dots, I_j$  segments adjacents, d'extrémités  $x, x_1, \dots, x_j = y$ , connectant  $x$  à  $y$ . Soient  $t > t_1 > \dots > t_j = s$ . Les segments de  $(x, t)$  à  $(x_1, t_1), \dots$ , de  $(x_{j-1}, t_{j-1})$  à  $(x_j, t_j)$  sont descendants, adjacents, et connectent  $(x, t)$  à  $(y, s)$ . En utilisant la première étape,  $u$  est constante le long de chacun de ces segments, d'où  $u(y, s) = u(x, t)$ .  $\square$

**3.11 Remarque.** L'ingrédient clé de la preuve est le suivant : si  $(x, t)$  est un extrémum local de  $u$  vérifiant  $Lu = 0$ , alors  $u$  est constante sur  $B(x, t; r)$ , pour  $r$  suffisamment petit. Néanmoins, dans le principe du maximum rétrograde, il ne suffit pas de supposer  $(x, t)$  point de maximum local pour déduire que  $u$  est constante sur  $\overline{\Omega} \times [0, t]$ . Voici un contre-exemple : soit  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$  comme dans la Proposition 3.17. Soit  $b > 0$  tel que  $u(x, t) = 0$  si  $t \geq b$ . Soit  $\Omega$  borné contenant l'origine (de sorte que  $u(0, t) \neq 0$  sur  $[0, b]$ ). Si  $b < t \leq T$ , alors  $(0, t)$  est un maximum (et minimum) local de  $u$ , mais  $u \neq 0$  dans  $\overline{\Omega} \times [0, t]$ .

**3.12 Remarque.** On ne peut pas améliorer la conclusion du théorème à  $u \equiv u(x, t)$  dans  $\overline{\Omega} \times [0, t + \varepsilon]$ . On va donner un contre-exemple en admettant le résultat suivant de régularité parabolique : soit  $\Omega = (0, 1) \square \mathbb{R}$ . Si  $h \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$ , alors il existe  $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$  vérifiant  $Lu = 0$  dans  $\Omega_T$  et  $u = h$  sur  $\Gamma_T$ .<sup>2</sup>

Soit  $0 < t < T$ . Soit  $\varphi \in C^\infty([0, T], \mathbb{R}_-)$  telle que  $\varphi \equiv 0$  sur  $[0, t]$  et  $\varphi \neq 0$  sur  $[0, t + \varepsilon]$ ,  $\forall \varepsilon > 0$ .<sup>3</sup>

Soit  $h(x, s) = \varphi(s)$ . Soit  $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$  solution de  $\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \overline{\Omega}_T \\ u = h & \text{sur } \Gamma_T \end{cases}$ . Le principe du maximum dans  $\Omega_t$  donne  $u \equiv 0$  dans  $\Omega \times [0, t]$ . Le principe du maximum dans  $\Omega_T$  donne  $u \leq 0$  dans  $\Omega_T$ . Ainsi,  $(x, t)$  est un point de maximum,  $\forall x \in \Omega$ , mais la donnée au bord interdit d'avoir  $u \equiv u(x, t)$  dans  $\Omega \times [0, t + \varepsilon]$ .

Nous allons maintenant mettre en œuvre la méthode d'énergie pour retrouver le Théorème 3.8 ; cette preuve est bien adaptée aux solutions faibles. D'abord un résultat préliminaire.

### 3.13 Lemme.

*Hypothèse.*  $\Omega \square \mathbb{R}^n$  borné.

*Conclusion.* Il existe une suite  $(\Omega_j)$  d'ouverts de classe  $C^\infty$  tels que :

1.  $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$ .
2.  $\lim_{j \rightarrow \infty} \sup_{x \in \partial \Omega_j} \text{dist}(x, \partial \Omega) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $K_\varepsilon = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial \Omega) \geq \varepsilon, |x| \leq 1/\varepsilon\}$ . Notons que  $\Omega = \bigcup_j K_{1/(2j)}$ . Soit  $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega; [0, 1])$  telle que  $\varphi_j \equiv 1$  dans  $K_{1/(2j)}$  et  $\text{supp } \varphi_j \subset K_{1/(2j+1)}$ . Le lemme de Sard (Théorème 8.14) implique l'existence d'un  $t_j \in (0, 1)$  valeur régulière de  $\varphi_j$ . Si on pose  $\Omega_j = \{x; \varphi_j(x) > t_j\}$ , alors  $\Omega_j$  est  $C^\infty$  (en utilisant la Proposition 8.16). Par ailleurs, on a

$$K_{1/(2j)} \subset \Omega_j \subset K_{1/(2j+1)} \Subset K_{1/(2j+2)} \subset \Omega_{j+1},$$

d'où  $\Omega_j \nearrow \Omega$ . Enfin,  $x \in \partial \Omega_j \implies x \notin K_{1/(2j)} \implies \text{dist}(x, \partial \Omega) < 1/(2j)$ .  $\square$

1. C'est ici qu'intervient le fait que  $I$  est descendant.
2. Exercice : ceci découle du Théorème 3.15.

3. Prendre par exemple  $\varphi(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq t \\ -e^{-(t-s)^{-2}}, & \text{si } s > t \end{cases}$ .

*Preuve du Théorème 3.8 par la méthode d'énergie.* Montrons par exemple que

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u \quad (3.17)$$

sous l'hypothèse  $Lu \leq 0$ .

*Étape 1.* On prouve (3.17) sous les hypothèses supplémentaires  $\Omega$  de classe  $C^1$  et  $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ . Soit  $M = \max_{\Gamma_T} u$ . Soit  $\Phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  telle que :  $\Phi(t) = 0$  si  $t \leq M$ ,  $\Phi(t) > 0$ ,  $\Phi'(t) \geq 0$ ,  $\Phi''(t) \geq 0$  si  $t > M$ .<sup>4</sup>

En multipliant l'inégalité  $Lu \leq 0$  par  $\Phi'(u)$  et en intégrant sur  $\Omega$  à  $t$  fixé, on trouve

$$0 \geq \int_{\Omega} (\Phi'(u)\partial_t u - \Phi'(u)\Delta_x u) = \partial_t \left( \int_{\Omega} \Phi(u) \right) + \int_{\Omega} \Phi''(u)|\nabla_x u|^2.$$

Il s'ensuit que  $t \mapsto F(t) := \int_{\Omega} \Phi(u(\cdot, t))$  décroît. Comme  $F(0) = 0$ , on trouve  $F(t) \leq 0$ ,  $\forall t$ , d'où  $u \leq M$ .

*Étape 2. Le cas général.* Soit  $\Omega_j$  comme dans le Lemme 3.13. Si  $\varepsilon > 0$ , alors la première étape appliquée au cylindre  $\Omega_j \times [\varepsilon, T - \varepsilon]$  donne

$$\max_{\overline{\Omega_j \times [\varepsilon, T - \varepsilon]}} u = \max_{(\Omega_j \times \{\varepsilon\}) \cup (\partial\Omega_j \times [\varepsilon, T - \varepsilon])} u.$$

On conclut en faisant, dans cette égalité,  $\varepsilon \searrow 0$  et  $j \rightarrow \infty$ . Au passage, on utilise 2. du Lemme 3.13 et la continuité uniforme de  $u$  sur  $\overline{\Omega}_T$ .  $\square$

Passons aux résultats d'existence. Les deux résultats qui suivent sont les pendants paraboliques des théorèmes de Poincaré et Kellogg pour le problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \Omega_T \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0, T] \end{cases}. \quad (3.18)$$

Nous supposons satisfaite la condition de compatibilité

$$u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (3.19)$$

qui revient à  $u \in C_0(\Omega)$  si  $\Omega$  est borné lipschitzien.

Une solution classique de (3.18) a la régularité  $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ .

### 3.14 Théorème.

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$  borné lipschitzien.  $u_0 \in C_0(\Omega)$ .

*Conclusion.* (3.18) a une solution classique.

Si on veut plus de régularité, il ne suffit pas de supposer  $u_0$  et  $\Omega$  plus réguliers. Il y a des conditions supplémentaires de compatibilité. Par exemple, si  $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$ , alors à partir de l'équation  $Lu = 0$  satisfaite si  $t = 0$  on conclut à

$$\Delta^k u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \forall k \in \mathbb{N}^*. \quad (3.20)$$

### 3.15 Théorème.

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$  borné de classe  $C^\infty$ .  $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ . Les conditions de compatibilité (3.20) sont satisfaites.

*Conclusion.* La solution de (3.18) est de classe  $C^\infty(\overline{\Omega}_T)$ .

L'approche la plus naturelle pour montrer ces deux résultats passe par la théorie des semi-groupes (théorème de Hille-Yosida). Nous y reviendrons.

4. Par exemple,  $\Phi(t) = [(t - M)_+]^4$  convient.

## Non unicité

Dans cette section, nous allons voir que l'équation de la chaleur dans le demi-espace

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

a une infinité de solutions (Proposition 3.17), mais que la solution du problème non homogène

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u|_{t=0} = f \end{cases} \quad (3.22)$$

donnée par (1.3) est la seule raisonnable (Proposition 3.18 et Théorème 3.19).

Le résultat suivant est la généralisation des inégalités de Cauchy (pour les fonctions holomorphes) à des fonctions de plusieurs variables.

### 3.16 Lemme.

*Hypothèses.*  $P$  est un polynôme de  $n$  variables.  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  et  $r > 0$ .

*Conclusion.* On a

$$|\partial^\alpha P(x)| \leq \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}} \sup_{\Gamma(x,r)} |P(z)|, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où  $\Gamma(x,r) = \{z \in \mathbb{C}^n; |z_j - x_j| = r, \forall j\}$ .<sup>5</sup>

*Démonstration.* Le cas  $n = 1$  correspond aux inégalités de Cauchy. La récurrence sur  $n$  est immédiate.  $\square$

**3.17 Proposition.** Le problème (3.21) admet des solutions non triviales dans  $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ .

*Démonstration.*

*Étape 1. Construction de  $u$ .* On s'appuie sur le résultat suivant, dont la preuve est simple [14, Theorem 1.3.5, p. 19] : soit  $(a_j)$  une suite décroissante de nombre positifs telle que  $\sum a_j < \infty$ . Soit  $\beta_j := 2^j / (a_0 \cdots a_j)$ . Alors il existe une fonction  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ , non identiquement nulle, telle que  $|f^{(j)}(t)| \leq \beta_j, \forall t \in \mathbb{R}, \forall j \in \mathbb{N}$ . On considère une telle fonction  $f$  correspondant au choix  $a_0 = 1, a_j = \frac{1}{j^a}, \forall j \geq 1$ , où  $a \in ]1, 2[$ .

Soient  $\alpha_j := 2j(2j+n-2), c_0 := 1$  et  $c_j := \frac{1}{\alpha_1 \cdots \alpha_j}, \forall j \geq 1$ . On choisit  $u(x,t) := \sum_j c_j \underbrace{f^{(j)}(t)|x|^{2j}}_{u_j}$ .

*Étape 2.  $u$  est  $C^\infty$  et  $\partial^\alpha u = \sum \partial^\alpha u_j, \forall \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ .* Il suffit de montrer que  $\sum \partial^\alpha u_j$  converge normalement sur tout  $K \Subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Soit  $R$  tel que  $|x| \leq R, \forall (x,t) \in K$ . On écrit  $\alpha = (\gamma, \alpha_0)$ , avec  $\alpha_0 \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{N}^n$ . En utilisant le lemme 3.16 on obtient (voir l'exercice 3.23)

$$\sum_j \sup_K |\partial^\alpha u_j| \leq \sum_j c_j \beta_{j+\alpha_0} \gamma! (1 + \sqrt{n}R)^{2j} R^{2j-|\gamma|} \equiv \sum m_j.$$

On a  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{m_{j+1}}{m_j} = 0$ . La série des  $m_j$  est donc convergente.

*Étape 3.  $u$  n'est pas identiquement nulle.* On a  $u(t,0) = f(t) \neq 0$ .

5. Plus généralement, on peut considérer  $x \in \mathbb{C}^n$ , à condition de prendre la dérivée complexe  $(\partial_{z_1})^{\alpha_1} \cdots (\partial_{z_n})^{\alpha_n}$ . La preuve reste inchangée.

*Étape 4. u vérifie (3.21).* En utilisant les égalités  $\Delta_x |x|^{2j} = \alpha_j |x|^{2(j-1)}$ ,  $\alpha_{j+1} c_{j+1} = c_j$ ,  $\forall j \geq 0$  et l'étape 2., on obtient

$$\begin{aligned} Lu(x, t) &= \sum_{j \geq 0} c_j f^{(j+1)}(t) |x|^{2j} - \sum_{j \geq 1} c_j f^{(j)}(t) \alpha_j |x|^{2(j-1)} \\ &= \sum_{j \geq 0} c_j f^{(j+1)}(t) |x|^{2j} - \sum_{j \geq 0} c_{j+1} f^{(j+1)}(t) \alpha_{j+1} |x|^{2j} = 0. \end{aligned}$$

□

Le résultat suivant montre que les solutions non-nulles de (3.21) sont très grandes, donc non physiques.

### 3.18 Proposition.

*Hypothèses.*  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  solution de  $\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u|_{t=0} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$ . Il existe  $C > 0, a > 0$  tels

que  $|u(x, t)| \leq C e^{a|x|^2} \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

*Conclusion.*  $u \equiv 0$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que  $u \equiv 0$  dans  $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]$ , avec  $\varepsilon$  suffisamment petit, puis de recommencer à partir de  $t = \varepsilon$ .

Soit  $\varepsilon < \frac{1}{8a}$ . Soit  $v(x, t) := \frac{1}{(2\varepsilon - t)^{n/2}} e^{|x|^2/(4(2\varepsilon - t))}$ . On vérifie que  $Lv = 0$  dans  $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]$ .

Soit  $\delta > 0$  et  $w := u - \delta v$ . Comme  $v(x, t) \geq \frac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} e^{|x|^2/(8\varepsilon)}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0, \varepsilon]$ , on trouve que, pour  $R$  suffisamment grand (dépendant de  $\delta$ ), on a  $w < 0$  sur la frontière parabolique de  $B(0, R) \times (0, \varepsilon)$ . Le principe du maximum implique  $w \leq 0$  sur  $\overline{B(0, R)} \times [0, \varepsilon]$ . En faisant  $R \rightarrow \infty$ , on obtient  $w \leq 0$  dans  $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]$ . En faisant  $\delta \rightarrow 0$ , on trouve  $u \leq 0$  dans  $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]$ . Par symétrie, on a aussi  $u \geq 0$  sur cet ensemble, d'où  $u \equiv 0$  dans  $\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon]$ . □

Le dernier résultat de cette partie suggère que la solution de (1.1) donnée par (1.3) est la seule raisonnable. Si  $u$  est censée représenter une température, alors  $u$  (dans l'échelle de Kelvin) doit être positive pour tout temps.

### 3.19 Théorème (Widder).

*Hypothèses.*  $u \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$  solution positive de  $Lu = 0$  dans  $\mathbb{R} \times (0, T)$ .  $f := u|_{t=0}$ .

*Conclusion.*  $u$  est donnée par (1.3), c'est-à-dire  $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} E(x - y, t) f(y) dy$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in (0, T)$ .

Au vu de ce résultat et d'autres résultats similaires, la solution (1.3) est adoptée comme "la" solution du problème (1.1). C'est la solution "mild".<sup>6</sup>

## Formule de Duhamel

Considérons maintenant le problème non homogène

$$\begin{cases} Lu = F(x, t) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u|_{t=0} = f \end{cases}. \quad (3.23)$$

En reprenant le calcul formel qui mène à la solution (1.3) du problème homogène (1.1), on devine que la solution est donnée par

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(x - y, t - s) F(y, s) dy ds. \quad (3.24)$$

---

6. En français dans le texte...



L'intégrande (par rapport à la variable  $s$ ) de cette formule n'est rien d'autre que la solution, à l'instant  $t$  du problème homogène  $Lu = 0$  avec comme donnée, à l'instant  $s < t$ , la fonction  $y \mapsto f(y, s)$ . En interprétant l'intégrale en  $s$  comme une somme infinie, on peut voir  $u$  comme une superposition (infinie) de solutions de l'équation homogène avec données initiales  $y \mapsto f(y, s)$  à l'instant  $s$ ; c'est le principe de Duhamel.

Notons que (3.24) ne peut donner qu'une des solutions de (3.23). Comme pour l'équation homogène, cette solution est "la" solution raisonnable; c'est la solution "mild".

## Effets dispersifs

Nous allons examiner le comportement, lorsque  $t \rightarrow \infty$ , d'une solution mild de (1.1) avec donnée  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $P(x) := E(x, 1)$ , de sorte que  $E(\cdot, t) = P_{\sqrt{t}}$ . Quel que soit  $p$ , on a

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} = \|P_{\sqrt{t}} * f\|_{L^p} \leq \|P_{\sqrt{t}}\|_{L^1} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}. \quad (3.25)$$

Plus généralement, en notant que  $u(\cdot, t) = P_{\sqrt{t-s}} * u(\cdot, s)$ ,  $0 \leq s < t$  (Exercice 3.27), on trouve

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|u(\cdot, s)\|_{L^p}, \quad 0 \leq s < t. \quad (3.26)$$

Si  $p = \infty$ , (3.26) ne peut pas être améliorée : si on prend  $f \equiv 1$ , alors on a  $u \equiv 1$ .

De même, (3.26) ne peut pas être améliorée si  $p = 1$  : si  $f \in L^1$  est positive, alors (3.25) et (3.26) deviennent égalités.

Pour les autres valeurs de  $p$  on a bien de la dispersion, c'est-à-dire la solution s'étale lorsque le temps tend vers l'infini.

### 3.20 Proposition.

*Hypothèses.*  $1 < p < \infty$ .  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

*Conclusion.* La solution de (1.1) satisfait  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} = 0$ .

*Démonstration.*

*Étape 1. Le cas  $p = 2$ .* Dans ce cas, on a

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|\mathcal{F}u(\cdot, t)\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2} \|e^{-t|\xi|^2} \hat{u}(\xi)\|_{L^2} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty,$$

la limite s'obtenant par convergence dominée.

*Étape 2. Le cas  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .* Soit, pour commencer,  $p \in (1, 2]$ . Alors il existe  $\theta \in (0, 1]$  tel que  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{1}$ . En utilisant l'inégalité de Hölder (8.2), on trouve

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^\theta \|u(\cdot, t)\|_{L^1}^{1-\theta} \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^2}^\theta \|f\|_{L^1}^{1-\theta} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty.$$

Si  $p \in [2, \infty)$ , on écrit  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{\infty}$  et on aboutit à la même conclusion.

*Étape 3. Le cas général.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$ . Soit  $v$  la solution de (1.1) avec donnée initiale  $g$ . Alors  $\|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p} < \varepsilon$ , par (3.25). L'étape 2. implique

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p} + \limsup_{t \rightarrow \infty} \|v(\cdot, t)\|_{L^p} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

□



Un deuxième type de dispersion est décrit par la

### 3.21 Proposition.


*Hypothèses.*  $u$  solution de (1.1).  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

*Conclusion.*  $|u(x, t)| \leq t^{-n/(2p)} \|f\|_{L^p}$ .

*Démonstration.* L'inégalité de Hölder donne, avec  $q$  le conjugué de  $p$ ,

$$|u(x, t)| = |P_{\sqrt{t}} * f(x)| \leq \|P_{\sqrt{t}}\|_{L^q} \|f\|_{L^p} = t^{-n/(2p)} \|f\|_{L^p}. \quad \square$$

## Exercices

**3.22 Exercice.** (Critique de l'équation de la chaleur). \* Si on allume le feu  à Lyon, montrer que son effet se fait instantanément ressentir partout dans le monde.

**3.23 Exercice.** On a  $|\partial^\gamma |x|^{2j}| \leq \gamma!(1 + \sqrt{n})^{2j} |x|^{2j-|\gamma|}$ ,  $\forall \gamma \in \mathbb{N}^n$ .

**3.24 Exercice.** \* On a

1.  $B(x, t; r) = (x, t) + B(0, 0; r)$ ;
2.  $B(0, 0; r) = \{(rx, r^2t); (x, t) \in B(0, 0; 1)\}$ ;
3.  $B(0, 0; r) = \{(x, t); -r^2/(4\pi) \leq t \leq 0, |x| \leq r(2nt/r^2 \ln(-4\pi t/r^2))^{1/2}\}$ .

**3.25 Exercice.** \* Avec les notations de la preuve du Théorème 3.5, montrer que  $\int_{U_c} \frac{\partial_y F(y, s)}{\partial v_y}$  converge.

**3.26 Exercice.** Un cas particulier de (3.4) est l'identité

$$\int_{B(x, t; r)} \frac{|y - x|^2}{(t - s)^2} dy ds = 4r^n. \quad (3.27)$$

Prouver directement cette formule.

**3.27 Exercice.** \* Soit  $P = E(\cdot, 1)$ .

1. Montrer que  $P_{\sqrt{t}} * P_{\sqrt{s}} = P_{\sqrt{t+s}}$ ,  $\forall s, t > 0$ . [Indication : prendre la transformée de Fourier.]
2. En déduire que la solution mild de (3.21) vérifie  $u(\cdot, t) = P_{\sqrt{t-s}} u(\cdot, s)$ ,  $0 < s < t$ . Quel est le résultat analogue pour les EDO?

## Indications

**Exercice 3.23.** On applique le Lemme 3.16 avec  $r = |x|$ . Si  $z \in \Gamma(x, r)$ , alors  $|z_j - x_j| = r$ , d'où  $|z - x| \leq \sqrt{n}r$  et  $|z| \leq (1 + \sqrt{n})r$ . On trouve

$$|\partial^\gamma |x|^{2j}| \leq \frac{\gamma!}{|x|^{|\gamma|}} \max_{|z| \leq (1 + \sqrt{n})|x|} |z|^{2j} \leq \gamma!(1 + \sqrt{n})^{2j} |x|^{2j-|\gamma|}.$$

**Exercice 3.26.** Grâce à l'Exercice 3.24, le cas général se ramène au cas  $x = 0$ ,  $t = 0$  et  $r = 1$  par translation et changement d'échelle. Soit  $I$  l'intégrale de l'énoncé, avec  $x = 0$ ,  $t = 0$  et  $r = 1$ . Soit, pour  $-1/(4\pi) \leq s \leq 0$ ,  $R(s) = (2ns \ln(-4\pi s))^{1/2}$ . En utilisant le Corollaire 8.40 et en faisant le changement de variables  $\ln(-4\pi s) = -\frac{2}{n}v$ , on trouve

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1/(4\pi)}^0 \int_{|y| \leq R(s)} \frac{|y|^2}{s^2} dy ds = \sigma_n \int_{-1/(4\pi)}^0 \frac{R(s)^{n+2}}{(n+2)s^2} ds \\ &= \frac{(2n)^{(n+2)/2} \sigma_n}{n+2} \int_{-1/(4\pi)}^0 s^{n/2-1} [\ln(-4\pi s)]^{n/2+1} ds = \frac{8\sigma_n}{n(n+2)\pi^{n/2}} \int_0^\infty v^{n/2+1} e^{-v} dv \\ &= \frac{8\sigma_n \Gamma(n/2+2)}{n(n+2)\pi^{n/2}} = \frac{8\sigma_n (n/2+1)(n/2)\Gamma(n/2)}{n(n+2)\pi^{n/2}} = \frac{2\sigma_n \Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} = 4, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant justifiée par l'identité (8.4).

## Commentaires

1. Pour la preuve de (3.3), j'ai suivi Fulks [8]. La formule (3.4), qui est une conséquence immédiate de (3.3), a été mise en évidence par Watson [21].

# Chapitre 4

## Ondes

L'opérateur des ondes est donné par  $\square u = \partial_{tt}u - \Delta_x u$ , où  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

### Solution du problème de Cauchy dans l'espace

On s'intéresse ici au problème

$$\begin{cases} \square u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u_t|_{t=0} = g & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases} . \quad (4.1)$$

Rappelons la stratégie de résolution de (4.1) développée dans le Chapitre 1 : en prenant formellement la transformée de Fourier dans la variable  $x$ , on obtient

$$u(x, t) = F(\cdot, t) *_x f(x) + G(\cdot, t) *_x g(x), \quad \text{où } \mathcal{F}_x F(\xi, t) = \cos(t|\xi|), \mathcal{F}_x G(\xi, t) = \frac{\sin(t|\xi|)}{t}.$$

Il suffit alors de trouver  $F$  et  $G$ . On peut suivre cette démarche très facilement en dimension 1, plus difficilement en dimension 2. Au-delà,  $F$  et  $G$  ne sont plus des fonctions, et il faut se placer dans le cadre de la théorie des distributions. Plutôt que de développer cette approche, nous allons présenter la méthode des moyennes sphériques couplée à la méthode de descente, approche qui fonctionne en toute dimension.

### Cas 1D : formule de d'Alembert

Rappelons la Proposition 1.2 : si  $f \in C^2(\mathbb{R})$  et  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , alors

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy \quad (4.2)$$

est solution de (4.1).

### Moyennes sphériques

Soit  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ . Si  $r > 0$ , on pose (avec  $S(x, r)$  la sphère  $\{y \in \mathbb{R}^n ; |y - x| = r\}$ )

$$U(x, t; r) = \int_{S(x, r)} u(y, t) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \int_{S(0, 1)} u(x + ry, t) d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (4.3)$$

A partir de cette égalité, on voit que  $U$  s'étend (via la deuxième formule de (4.3)) pour  $r \leq 0$ , et que  $U \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Par ailleurs,  $U$  est paire en  $r$  et on a

$$u(x, t) = U(x, t; 0). \quad (4.4)$$

On définit, de même, pour tout  $r$  :

$$F(x; r) := \int_{S(0,1)} f(x + ry) d\mathcal{H}^{n-1}(y), \quad G(x; r) := \int_{S(0,1)} g(x + ry) d\mathcal{H}^{n-1}(y). \quad (4.5)$$

### Cas 3D : formule de Kirchhoff

Dans cette partie, on suppose  $n = 3$ . On fixe  $x$  et on pose  $V(r, t) = rU(x, t; r)$ ,  $F(r) = F(x; r)$ ,  $G(r) = G(x; r)$ .

**4.1 Lemme.** Soit  $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  solution de (4.1). Alors  $V \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  satisfait

$$\begin{cases} V_{tt} - V_{rr} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ V(r, 0) = rF(r), & r \in \mathbb{R} \\ V_t(r, 0) = rG(r), & r \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (4.6)$$

*Démonstration.* On vérifie aisément que  $V \in C^2$  et que  $V$  vérifie les conditions initiales. Il suffit de vérifier l'équation satisfaite par  $V$  pour  $r \neq 0$ , et par imparité de  $V$  par rapport à  $r$  on se ramène à  $r > 0$ . On peut supposer  $x = 0$ . On a, avec  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; |x - y| < r\}$  et en utilisant le théorème flux-divergence :

$$\begin{aligned} U_r(r, t) &= \int_{S(0,1)} y \cdot \nabla_y u(ry, t) d\mathcal{H}^{n-1}(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S(0,r)} \frac{y}{r} \cdot \nabla_y u(y, t) d\mathcal{H}^{n-1}(y) \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(0,r)} \Delta_y u(y, t) dy = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{B(0,r)} u_{tt}(y, t) dy. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Par ailleurs, on a clairement

$$4\pi r^2 U_{tt}(r, t) = \int_{S(0,r)} u_{tt}(y, t) d\mathcal{H}^{n-1}(y),$$

d'où

$$\int_{B(0,r)} u_{tt}(y, t) dy = \int_0^r \int_{S(0,s)} u_{tt}(y, s) dy = 4\pi \int_0^r s^2 U_{tt}(s, t) ds. \quad (4.8)$$

En combinant (4.7) et (4.8), on obtient

$$U_r(r, t) = \frac{1}{r^2} \int_0^r s^2 U_{tt}(s, t) ds, \quad (4.9)$$

d'où (en dérivant (4.9))

$$V_{rr}(r, t) = (rU)_{rr}(r, t) = rU_{rr}(r, t) + 2U_r(r, t) = rU_{tt}(r, t) = V_{tt}(r, t). \quad \square$$

On continue ainsi : à partir de (4.6), on trouve

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} V(r, t) = \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2r} ((r+t)F(r+t) + (r-t)F(r-t)) + \frac{1}{2r} \int_{r-t}^{r+t} sG(s) ds \right). \quad (4.10)$$

En utilisant la parité de  $F$  et  $G$ , on trouve

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2r} ((t+r)F(r+t) - (t-r)F(t-r)) + \frac{1}{2r} \int_{t-r}^{t+r} sG(s) ds \right) \\ &= \left( \frac{d}{dr} (rF(r)) \right) (t) + tG(t), \end{aligned}$$

d'où la formule de Kirchhoff

$$u(x, t) = \int_{S(x, t)} (f(y) + \nabla f(y) \cdot (y - x) + tg(y)) d\mathcal{H}^2(y) \quad (4.11)$$

(qu'il faut entendre, pour  $t \leq 0$ , au sens de l'égalité (4.12) ci-dessous).

#### 4.2 Théorème.

*Hypothèses.*  $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ .  $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$ .  $u$  donnée par (4.11).

*Conclusion.*  $u$  résout (4.1).

*Démonstration.* En écrivant

$$u(x, t) = \int_{S(0,1)} (f(x+ty) + t\nabla f(x+ty) \cdot y + tg(x+ty)) d\mathcal{H}^2(y), \quad (4.12)$$

on voit aisément que  $u \in C^2$  et que  $u$  vérifie les conditions initiales dans (4.1).<sup>1</sup> Il reste à vérifier que  $u$  est solution de  $\square u = 0$ . Une possibilité est de vérifier cette égalité par un calcul direct basé sur le théorème flux-divergence [6, p. 77]. Voici un raisonnement indirect. Si  $f, g \in C_c^\infty$ , nous verrons dans la deuxième partie de ce cours que (4.1) a une solution  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ . Il s'ensuit que cette solution est donnée par (4.11), car nous avons déduit la formule de  $u$  en supposant son existence. Soient maintenant  $f \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$  et  $g \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$ . En approchant  $f$  et  $g$  par des fonctions  $C_c^\infty$ , on voit (à partir de (4.12)) que  $u$  vérifie encore  $\square u = 0$ . Passons au cas général : on note que, au voisinage d'un point  $(x, t)$ , la solution donnée par (4.11) ne dépend que des valeurs prises par  $f$  et  $g$  dans un compact. L'égalité  $\square u = 0$  étant à vérifier localement, on peut donc multiplier  $f$  et  $g$  par une fonction plateau convenable et les supposer à support compact. On conclut donc en se ramenant au cas  $f \in C_c^3(\mathbb{R}^3)$  et  $g \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$ .  $\square$

## Descente

La méthode de la descente consiste à résoudre une équation en dimension  $m < n$  à partir de sa résolution en dimension  $n$ . Exemple : si on sait résoudre (4.1) en dimension  $n$ , soient  $f, g : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose  $\tilde{f}(x', x_n) = f(x')$ ,  $\tilde{g}(x', x_n) = g(x')$ , et on résout (4.1) dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ , avec données initiales  $\tilde{f}$  et  $\tilde{g}$ . Les données étant indépendantes de  $x_n$ , on espère<sup>2</sup> que la solution  $\tilde{u}$  trouvée ne dépend pas de  $x_n$ , et alors  $u(x') = \tilde{u}(x', 0)$  est solution de (4.1) dans  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

1. Au passage, on utilise l'Exercice 8.44.

2. Ce sera le cas pour l'équation des ondes.

### Cas 2D : formule de Poisson

Soient  $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$  et  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . On définit  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{g}$  et  $\tilde{u}$  comme ci-dessus. Notons que  $\tilde{u}$  obtenue dans  $\mathbb{R}^3$  ne dépend pas de  $x_3$ . En effet,  $v^s(x, t) := \tilde{u}(x', x_3 - s, t)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , est solution du même problème que  $\tilde{u}$ , et donc coïncide avec  $\tilde{u}$ . On trouve que  $u(x_1, x_2, t) = \tilde{u}(x_1, x_2, 0, t)$  est solution de (4.1) dans  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ , d'où le résultat suivant.

#### 4.3 Théorème.

*Hypothèses.*  $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ .  $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$ .

*Conclusion.*  $u$  donnée par

$$u(x, t) = \frac{t}{2} \int_{B(x, t)} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |x - y|^2}} (f(y) + \nabla f(y) \cdot (y - x) + tg(y)) dy \quad (4.13)$$

est solution de (4.1).

Ici,  $B(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^2; |y - x| < t\}$ . Pour  $t \leq 0$ , la formule (4.13) s'interprète comme étant le membre de droite de (4.14) ci-dessous.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que

$$\tilde{u}(x, 0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{B(0, 1)} \frac{1}{\sqrt{1 - |y|^2}} (f(x + ty) + t\nabla f(x + ty) \cdot y + tg(x + ty)) dy. \quad (4.14)$$

Avec  $S(0, 1)$  la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ , (4.12) donne, en utilisant la paramétrisation

$$\begin{aligned} B(0, 1) \ni y &\mapsto \left(y, \pm \sqrt{1 - |y|^2}\right) \in S(0, 1) \cap (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_\pm), \\ \tilde{u}(x, 0, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{S(0, 1)} (f(x + ty) + t\nabla f(x + ty) \cdot y + tg(x + ty)) d\mathcal{H}^2(y, z) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{B(0, 1)} \frac{1}{\sqrt{1 - |y|^2}} (f(x + ty) + t\nabla f(x + ty) \cdot y + tg(x + ty)) dy. \quad \square \end{aligned}$$

### Dimension $\geq 4$

On peut trouver la solution du problème (4.1) en toute dimension. Le point de départ est (4.7) (écrite en dimension quelconque), qui permet d'arriver à l'identité

$$U_r(r, t) = \sigma_n \int_0^r s^{n-1} U_{tt}(s, t) ds, \quad (4.15)$$

qui est l'analogie  $n$ -dimensionnel de (4.9). A partir de (4.15), on peut déduire, en dimension impaire, qu'une fonction auxiliaire construite à partir de  $U$  vérifie l'équation des ondes 1D.

Exemple : en dimension 5 on pose (à  $x$  fixé)  $V(r, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 U(x, t; r))$  et on vérifie par un calcul direct que  $V$  satisfait l'équation des ondes 1D avec des données initiales obtenues à partir de  $f$  et  $g$ . Puis on exprime  $U$  en fonction de  $f$  et  $g$  et on retrouve  $u$  à partir de l'égalité  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(r, t)}{r} = 3u(x, t)$ , facilement vérifiée.

Le cas de la dimension 4 est obtenu à partir de celui de la dimension 5 par descente.

Cette méthode passe (avec comme seules différences la définition de  $V$  et la formule permettant d'obtenir  $u$  à partir de  $V$ ) à toute dimension impaire. La méthode de descente permet de traiter les dimensions paires; voir [6, pp. 74–80].

## Cône de dépendance

En dimension 3, on voit qu'à l'instant  $t > 0$  et au point  $x$ , la solution ne dépend que des valeurs des données initiales sur la sphère  $S(x, t)$ .<sup>3</sup> Si on écrit la "vraie" équation des ondes (faisant intervenir la vitesse  $c$  du son), alors  $u(x, t)$  ne dépend que des données sur  $S(x, ct)$ . C'est le *principe de Huyghens* : si un son est émis à l'instant  $t_0 = 0$  à distance  $d$ , alors on l'entend à l'instant  $\frac{d}{c}$  ; ni avant, ni après. *A contrario*, en 2D  $u(x, t)$  dépend des données dans  $B(x, ct)$ . Donc on entend le son *ad vita æternam* (mais de moins en moins fort) à partir de l'instant  $\frac{d}{c}$ . On peut voir ce fait dans l'autre sens : un son émis en  $x_0$  est entendu dans le cône creux  $\{(x, t); t \in \mathbb{R}, |x - x_0| = |t|\}$  en 3D, et dans le cône plein  $\{(x, t); t \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq |t|\}$  en 2D.

Une autre occasion de retrouver le cône (plein) de dépendance, donné pour  $T > 0$  par

$$K(x, T) := \{(y, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; 0 \leq t \leq T, |x - y| \leq T - t\}, \quad (4.16)$$

est le résultat suivant, valable dans un domaine.

**4.4 Proposition.** *Si  $u \in C^2(K(x, T))$  vérifie, dans  $K(x, T)$ , l'équation  $\square u = 0$  et les conditions initiales  $u = u_t = 0$  à  $t = 0$ , alors  $u = 0$  dans  $K(x, T)$ .*

*Démonstration.* On multiplie l'équation de  $u$  par  $u_t$  et on trouve, après application de la première formule de Green :

$$\int_{B(x, T-t)} u_t u_{tt} - \int_{S(x, T-t)} u_t \nabla_x u \cdot \nu_x + \int_{B(x, T-t)} \nabla_x u \cdot \nabla_x u_t = 0. \quad (4.17)$$

Par ailleurs, si  $f \in C^1(K(x, T))$ , alors

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{B(x, T-t)} f \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^{T-t} \int_{S(x, r)} f dr \right) = - \int_{S(x, T-t)} f + \int_{B(x, T-t)} f_t, \quad (4.18)$$

d'où (4.17) devient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{B(x, T-t)} |\nabla u|^2 \right) = \int_{S(x, t)} \left( u_t \nabla_x u \cdot \nu_x - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right). \quad (4.19)$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le membre de droite de (4.19) est  $\leq 0$ . On trouve que  $\int_{B(x, T-t)} |\nabla u|^2$  (qui est positive et vaut 0 en  $t = 0$ ) décroît avec  $t$ , d'où  $u$  constante, d'où  $u = 0$ .  $\square$

## Formule de Duhamel

Comme pour l'équation de la chaleur, pour  $F$  assez régulière on peut calculer la solution de

$$\begin{cases} \square u = F(x, t) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u_t(x, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (4.20)$$

3. Enfin, presque : la solution fait aussi intervenir les dérivées de  $f$  sur  $S(x, r)$ , qui dépendent des valeurs de  $f$  dans un voisinage de  $S(x, r)$ .

à partir de la solution  $u^s$  du problème

$$\begin{cases} \square u^s = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u^s(x, s) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \\ u_t^s(x, s) = F(x, s) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \quad (4.21)$$

qui elle-même s'obtient par une translation dans le temps des solutions de (4.1). Plus précisément, on a

$$u(x, t) = \int_0^t u^s(x, t) ds. \quad (4.22)$$

## Le cas d'un domaine

C'est à nouveau la théorie de Hille-Yosida qui fournit des réponses, mais le meilleur cadre fonctionnel n'est pas celui des fonctions de classe  $C^k$ . Donnons tout de même un résultat dans ce cadre.

### 4.5 Théorème.

*Hypothèses.*  $\Omega \in C^\infty$  borné.  $f, g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .  $\Delta^k f = \Delta^k g = 0$  sur  $\partial\Omega$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

*Conclusion.* Le problème

$$\begin{cases} \square u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = f & \text{dans } \Omega \\ u_t|_{t=0} = g & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.23)$$

a une (et une seule) solution  $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ .

## Commentaires

Pour la méthode des moyennes sphériques, j'ai suivi [4, VI, §12] et son avatar [6, pp. 74-80].

Les premiers à avoir explicitement noté la différence entre propagation dans des cônes creux et cônes pleins selon la dimension sont Volterra et Tedone, vers 1890. Herglotz et surtout Petrowski ont montré que ces propriétés s'étendent à des opérateurs plus généraux; voir l'article de Gårding [9] à ce sujet.

L'idée d'utiliser la méthode d'énergie pour l'unicité (idée qui fonctionne aussi pour  $\Delta$  et  $L$ ) remonte à Zaremba. On peut montrer la Proposition 4.4 directement à partir des formules explicites; son intérêt réside dans la preuve, qui s'applique aussi à l'équation  $u_{tt} - \operatorname{div}(A\nabla u) = 0$ , pour laquelle on ne dispose pas de formule de résolution.

Il y a une formule de la moyenne pour l'équation des ondes, mais elle est moins utile que pour  $\Delta$  ou  $L$ ; c'est la formule d'Asgeirsson, voir [4, pp. 744-747].

Il y a aussi des estimations dispersives pour l'équation des ondes : il s'agit des fameuses estimations de Strichartz, qui sont difficiles à établir [18, Chapter IV].



# Chapitre 5

## Schrödinger

L'opérateur de Schrödinger est donné par la formule  $Su = iu_t + \Delta_x u$ .

### Groupes, semi-groupes

Commençons par quelques considérations générales. Considérons une équation autonome dépendant du temps : ça peut être une EDO autonome,  $L$ ,  $\square$ ,  $S$ , etc.<sup>1</sup> Notons  $S(t)(x)$  l'état à l'instant  $t$  de la solution valant  $x$  à l'instant  $t = 0$ . Sous hypothèse d'existence et unicité des solutions, on a  $S(t+s)(x) = S(t)(S(s)(x))$ , ou encore  $S(t+s) = S(t)S(s)$ ;  $(S(t))_{t \geq 0}$  est donc un semi-groupe agissant sur l'ensemble des  $x$  admissibles. Si le temps est réversible, alors  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe.

Quelques exemples.

1. L'équation des ondes s'écrit sous la forme d'un système du premier ordre : en posant  $v = u_t$ , on a  $(u, v)_t = (v, \Delta_x u)$ . Si on prend comme espace d'états  $X = C^\infty(\mathbb{R}^n) \times C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors on peut voir (à partir des formules de d'Alembert, Poisson, Kirchhoff et leurs généralisations aux dimensions supérieures) que la solution de (4.1) est  $C^\infty$ . Si on désigne par  $S(t)(f, g)$  le couple  $(u, u_t)$  à l'instant  $t \in \mathbb{R}$ , alors  $S(t) : X \rightarrow X$  et, par unicité et réversibilité du temps,  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe ; c'est le groupe des ondes.
2. Pour l'équation de la chaleur, on ne peut raisonner de cette façon, car il n'y pas unicité. Prenons  $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , ou  $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ , et soit  $S(t)f = P_{\sqrt{t}} * f \in X$ ,  $f \in X$ , où  $P(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$ .<sup>2</sup> En notant que  $\mathcal{F}_x(P_{\sqrt{t}})(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$ , on trouve  $\mathcal{F}_x(P_{\sqrt{t}})\mathcal{F}(P_{\sqrt{s}}) = \mathcal{F}(P_{\sqrt{t+s}})$ , d'où  $P_{\sqrt{t}} * P_{\sqrt{s}} = P_{\sqrt{t+s}}$ , ce qui implique  $S(t+s) = S(t)S(s)$ .  $(S(t))_{t \geq 0}$  est le semi-groupe de la chaleur.
3. Pour  $S$ , il est à nouveau impossible d'invoquer l'unicité. En effet, on peut reprendre la construction de la fonction  $u$  dans la preuve de la Proposition 3.17 et modifier les coefficients  $c_j$  afin d'obtenir une solution non triviale de l'équation de Schrödinger avec donnée initiale nulle dans le demi-espace. Pour construire le groupe de Schrödinger, on procède comme pour l'équation de la chaleur. Si on reprend la preuve de la Proposition 1.5, on voit que, pour  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , la solution mild<sup>3</sup> de (1.10) est donnée par

$$u(\cdot, t) = \mathcal{F}_x^{-1} \left[ (e^{-it|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)) \right]. \quad (5.1)$$

Par le théorème de Plancherel, le membre de droite appartient à  $L^2$  si  $f \in L^2$ . Ceci

1. Autonome : de la forme  $\dot{x} = F(x)$ .

2. Ce qui est suggéré par la solution mild de (1.1) donnée par le Théorème 1.1.

3. Par analogie avec l'équation de la chaleur.

suggère de procéder ainsi : on prend  $X = L^2(\mathbb{R}^n)$  et on définit  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  par :

$$S(t)f = \mathcal{F}_x^{-1} \left[ (e^{-it|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)) \right] \in L^2(\mathbb{R}^n); \quad (5.2)$$

c'est le *groupe de Schrödinger*.

Une application immédiate du théorème de Plancherel donne le résultat suivant.

**5.1 Proposition.**  $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$  est un groupe d'opérateurs unitaires dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Nous verrons plus tard que, si  $f \in L^2$ , alors  $u(\cdot, t) = S(t)f$  est solution (dans un sens approprié) de (1.10).

## Effets dispersifs

Dans cette partie, nous étudions la décroissance de  $S(t)$  lorsque  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**5.2 Proposition.**

*Hypothèses.*  $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $1 \leq p \leq 2$ .  $q = \frac{p}{p-1}$ .

*Conclusion.* On a

$$\|S(t)f\|_{L^q} \leq \frac{1}{(4\pi|t|)^{n(1/p-1/2)}} \|f\|_{L^p}. \quad (5.3)$$

*Démonstration.* On commence par le cas  $p = 1$ . La formule (1.12) donne (5.3) si  $p = 1$  et  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Si  $f \in L^1 \cap L^2$ , alors il existe une suite  $(f_j) \subset C_c^\infty$  telle que  $f_j \rightarrow f$  à la fois dans  $L^1$  et  $L^2$ . La convergence  $f_j \rightarrow f$  dans  $L^2$  donne  $S(t)f_j \rightarrow S(t)f$  dans  $L^2$  et donc, à une sous-suite près,  $S(t)f_j \rightarrow S(t)f$  p. p. L'estimation (5.3) appliquée à  $f_j$  avec  $p = 1$  donne, par passage à la limite p. p., (5.3) pour  $p = 1$  et  $f$ .

Le cas  $p = 2$  est donné par la Proposition 5.1. Le cas général s'obtient par le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin (Théorème 8.37) appliqué avec :  $X = Y = \mathbb{R}^n$  (avec la mesure de Lebesgue),  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 2$ ,  $q_0 = \infty$ ,  $q_1 = 2$ ,  $\theta = \frac{2-p}{p}$ .  $\square$

## Cas d'un domaine

A nouveau, la théorie de Hille-Yosida fournit des résultats d'existence, et le bon cadre n'est pas celui des fonctions  $C^k$ . Un exemple.

**5.3 Théorème.**

*Hypothèses.*  $\Omega \in C^\infty$  borné.  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .  $\Delta^k f = 0$  sur  $\partial\Omega$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

*Conclusion.* Le problème

$$\begin{cases} Su = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u|_{t=0} = f & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (5.4)$$

a une (et une seule) solution  $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ .

## **Deuxième partie**

# **Solutions généralisées. Méthodes fonctionnelles**



# Chapitre 6

## Méthodes fonctionnelles pour $\Delta$ , $L$ et $\square$

### Théorie spectrale du Laplacien

Dans cette partie, on considère  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné. On munit  $H_0^1(\Omega)$  (avec  $\Omega$  borné) du produit scalaire

$$(u, v)_{H_0^1} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v. \quad (6.1)$$

D'après l'inégalité de Poincaré (Proposition 9.13), la norme

$$\|u\|_{H_0^1} = \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \right)^{1/2} \quad (6.2)$$

associée au produit scalaire de (6.1) est équivalente à la norme standard.

#### 6.1 Proposition.

*Hypothèse.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné.

*Conclusions.*

1.  $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  est un isomorphisme d'espaces de Banach.
2. En particulier, il existe  $C_1(\Omega), C_2(\Omega) > 0$  tels que

$$C_1(\Omega) \|T\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \|(-\Delta)^{-1}T\|_{H_0^1} \leq C_2(\Omega) \|T\|_{H^{-1}(\Omega)}, \quad \forall T \in H^{-1}(\Omega). \quad (6.3)$$

3. Pour  $T \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $u \in H_0^1(\Omega)$ , on a

$$(-\Delta)^{-1}(T) = u \iff \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = T(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (6.4)$$

4. Pour  $T \in H^{-1}(\Omega)$ ,  $u := (-\Delta)^{-1}(T)$  est l'unique solution du problème de minimisation

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - T(v); v \in H_0^1(\Omega) \right\}.$$

$-\Delta$  étant linéaire bijective, on peut transporter le du produit scalaire de  $H_0^1(\Omega)$  vers  $H^{-1}(\Omega)$  par la formule

$$(T, U)_{H^{-1}} = ((-\Delta)^{-1}T, (-\Delta)^{-1}U)_{H_0^1}.$$

**6.2 Proposition.** *La norme induite par le produit scalaire ci-dessus,  $T \mapsto (T, T)_{H^{-1}}^{1/2}$ , est égale à la norme de  $T$  comme élément de  $[H_0^1(\Omega)]^*$ , lorsque  $H_0^1(\Omega)$  est muni de la norme (6.2).*

*Démonstration.* Soit  $u = (-\Delta)^{-1}(T)$ , de sorte que  $\|T\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H_0^1}$ .

On a

$$\begin{aligned} \|T\|_{[H_0^1(\Omega)]^*} &= \sup \left\{ T(v); v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1} \leq 1 \right\} \stackrel{(a)}{=} \sup \left\{ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v; v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ (u, v)_{H_0^1}; v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{H_0^1} \leq 1 \right\} \stackrel{(b)}{=} \|u\|_{H_0^1} = \|T\|_{H^{-1}}. \end{aligned}$$

Ici :

(a) suit de (6.4).

(b) est une conséquence de l'égalité

$$\|x\| = \sup\{(x, y); \|y\| \leq 1\}$$

valable pour toute norme  $\|\cdot\|$  induite par le produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ . □

### 6.3 Proposition.

*Hypothèse.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné.

*Conclusions.* L'opérateur  $(-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$  induit un opérateur  $(-\Delta)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , qui est :

1. Compact.
2. Auto-adjoint.
3. Positif.

### 6.4 Théorème.

*Hypothèse.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné.

*Conclusions.* Il existe une suite  $(e_j)_{j \geq 1} \subset H_0^1(\Omega)$  et une suite  $(\lambda_j) \subset (0, +\infty)$  telles que

1.  $-\Delta e_j = \lambda_j e_j, \forall j \in \mathbb{N}^*$ .
2.  $\lambda_j \nearrow \infty$ .
3.  $(e_j)$  est une base hilbertienne de  $L^2(\Omega)$ .
4.  $\left( \frac{e_j}{\sqrt{\lambda_j}} \right)$  est une base hilbertienne de  $H_0^1(\Omega)$ .
5.  $(\sqrt{\lambda_j} e_j)$  est une base hilbertienne de  $H^{-1}(\Omega)$ .
6. Si  $u \in H_0^1(\Omega)$ , alors on a  $u = \sum (u, e_j)_{L^2} e_j$  (série convergente dans  $L^2(\Omega)$  et  $H_0^1(\Omega)$ ) et

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 = \sum \lambda_j |(u, e_j)_{L^2}|^2.$$

7. Si  $T \in H^{-1}(\Omega)$ , alors on a  $T = \sum T(e_j) e_j$  (série convergente dans  $H^{-1}(\Omega)$ ) et

$$\|T\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = \sum \frac{|T(e_j)|^2}{\lambda_j}.$$

8. Si  $f \in L^2(\Omega)$ , alors la solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de  $-\Delta u = f$  est donnée par  $u = \sum \frac{(f, e_j)_{L^2}}{\lambda_j} e_j$ .
9. Si  $T \in H^{-1}(\Omega)$ , alors la solution  $u \in H_0^1(\Omega)$  de  $-\Delta u = T$  est donnée par  $u = \sum \frac{T(e_j)}{\lambda_j} e_j$ .

Ce dernier théorème nous permet de trouver une solution généralisée du problème classique de Dirichlet (2.10). Si  $u$  est solution classique, alors  $u \in H^1(\Omega)$  et  $\text{tr } u = g$  (Exercice 9.63). Ainsi, la solution  $u$  donnée par le résultat suivant peut être vue comme une solution généralisée de (2.10).

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = T & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.5)$$

### 6.5 Théorème.

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  Lipschitz borné.  $T \in H^{-1}(\Omega)$ .  $g \in H^{1/2}(\Omega)$ .

*Conclusions.*

1. Le problème (6.5) a, dans l'espace  $H^1(\Omega)$ , une solution généralisée  $u$  et une seule. Cet  $u$  vérifie (6.5) au sens suivant :
  - a.  $-\Delta u = T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .
  - b.  $\text{tr } u = g$ .
2. L'application

$$H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) \ni (T, g) \mapsto u \in H^1(\Omega)$$

est un isomorphisme d'espaces de Banach. En particulier, on a

$$\|u\|_{H^1} \sim \|T\|_{H^{-1}} + \|g\|_{H^{1/2}}.$$

3. La solution  $u$  de (6.5) est la (seule) solution du problème de minimisation

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - T(v); v \in H^1(\Omega), \text{tr } u = g \right\}.$$

**6.6 Remarque.** On a retrouvé le principe de Dirichlet (Proposition 2.11)!

**6.7 Proposition.** Les fonctions propres du Laplacien sont dans  $C^\infty(\Omega)$ .

## Résolution de $L$ et $\square$ par séparation des variables

Nous allons considérer uniquement le cas du problème de Dirichlet avec donnée nulle au bord. Le cas d'une donnée au bord non nulle peut être traité comme dans la section précédente.

Dans l'esprit de la section précédente, nous allons chercher des solutions généralisées.

On considère d'abord le problème "de Cauchy" pour l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} Lu = F & \text{dans } \Omega_T \\ u|_{t=0} = U & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_T. \end{cases} \quad (6.6)$$

### 6.8 Théorème.

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné.  $U \in H^{-1}(\Omega)$ .  $F \in L^2(\Omega_T)$ . On pose

$$u(\cdot, t) = \sum_j \left( U(e_j) e^{-\lambda_j t} + \int_0^t e^{\lambda_j(s-t)} F_j(s) ds \right) e_j.$$

Ici,  $F_j(t) = (F(\cdot, t), e_j)_{L^2}$ .

*Conclusions.*  $u$  est solution de (6.6) au sens suivant :

1.  $Lu = F$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_T)$ .
2. On a  $u \in C((0, T]; H_0^1(\Omega))$ . (D'où  $\text{tr } u(\cdot, t) = 0, \forall t > 0$ .)
3. On a  $\lim_{t \searrow 0} u(\cdot, t) = U$  dans  $H^{-1}(\Omega)$ .

La solution  $u$  est uniquement déterminée par les propriétés 1-3.

*Démonstration.* On considère, par exemple, le cas où  $F = 0$  et  $U$  quelconque ; le cas symétrique où  $F$  est quelconque et  $U = 0$  se traite de manière analogue, et le cas général s'obtient en combinant ces deux cas particuliers. On considère donc

$$u(\cdot, t) = \sum_j U(e_j) e^{-\lambda_j t} e_j. \quad (6.7)$$

*Étape 1.* On a  $u \in C((0, T]; H_0^1(\Omega))$ .

On repose sur l'Exercice 6.11 appliqué sur  $I = (\varepsilon, T]$ , avec  $u_j \in C((0, T]; \mathbb{C})$ ,  $u_j(t) = U(e_j) e^{-\lambda_j t}$ .  
On a

$$|u_j(t)| \leq a_j = |U(e_j)| e^{-\lambda_j \varepsilon}$$

et (en utilisant le Théorème 6.4 7)

$$\sum \lambda_j a_j^2 = \sum \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j \varepsilon} \frac{|U(e_j)|^2}{\lambda_j} = \sup_j \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j \varepsilon} \|U\|_{H^{-1}}^2 \leq C \|U\|_{H^{-1}}^2,$$

où

$$C = \sup_j \lambda_j^2 e^{-2\lambda_j \varepsilon} = \sup_j \frac{\lambda_j^2 \varepsilon^2}{\varepsilon^2} e^{-2\lambda_j \varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sup_{t>0} t^2 e^{-2t} < \infty.$$

*Étape 2.* On a  $u \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$  et  $u(\cdot, 0) = U$ .

L'égalité  $u(\cdot, 0) = U$  suit du Théorème 6.4 7. La continuité par rapport à  $t$  s'établit comme dans l'étape précédente, à partir de

$$|u_j(t)| \leq a_j = |U(e_j)|$$

et

$$\sum \frac{a_j^2}{\lambda_j} = \sum \frac{|U(e_j)|^2}{\lambda_j} = \|U\|_{H^{-1}}^2.$$

*Étape 3.*  $u$  vérifie  $Lu = 0$  : un cas particulier.

On va montrer que chaque terme  $v_j = u_j e_j$  de la somme (6.7) vérifie  $Lv_j = 0$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_T)$ . Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_T)$ . En utilisant  $u_j \in C([0, T]; \mathbb{C})$  et  $e_j \in L^2(\Omega)$ , on obtient

$$\begin{aligned} Lv_j(\varphi) &= v_j(-\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi) = - \int u_j(t) \partial_t \varphi(x, t) e_j(x) dx dt - \int u_j(t) e_j(x) \Delta_x \varphi(x, t) dx dt \\ &= - \int u_j(t) \partial_t \varphi(x, t) e_j(x) dx dt + \int u_j(t) \nabla e_j(x) \cdot \nabla_x \varphi(x, t) dx dt \\ &= - \int u_j(t) \partial_t \varphi(x, t) e_j(x) dx dt + \lambda_j \int u_j(t) e_j(x) \varphi(x, t) dx dt \\ &= \int \left( \int (-u_j(t) \partial_t \varphi(x, t) + \lambda_j u_j(t) \varphi(x, t)) dt \right) dx \\ &= - \int \left( \int (u_j(t) \partial_t \varphi(x, t) + u_j'(t) \varphi(x, t)) dt \right) dx \\ &= - \int \left( \int \partial_t (u_j \varphi) dt \right) dx = 0. \end{aligned}$$



Étape 4.  $u$  vérifie  $Lu = 0$ .

Soit  $u^N = \sum_{j \leq N} v_j$ . En utilisant le Théorème 6.4 7, on obtient

$$\begin{aligned} \|u^N - u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 &= \int_0^T \|u^N(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \sum_{j > N} |v_j(t)|^2 dt \\ &\leq \sum_{j > N} |U(e_j)|^2 \int_0^\infty e^{-2\lambda_j t} dt = \frac{1}{2} \sum_{j > N} \frac{|U(e_j)|^2}{\lambda_j} \rightarrow 0 \text{ quand } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Donc  $u^N \rightarrow u$  dans  $L^2(\Omega_T)$ , d'où  $u^N \rightarrow u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_T)$ . Comme (par l'étape précédente) on a  $Lu^N = 0$ , on trouve  $Lu = 0$ .

Étape 5. *Unicité*. On doit montrer que, si  $u$  satisfait 1-3 avec  $U = 0$  et  $F = 0$ , alors  $u = 0$ . On note d'abord que

$$u \in C((0, T]; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow C((0, T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L_{loc}^2((0, T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow L_{loc}^2(\Omega_T).$$

Soit  $u_j(t) = (u(\cdot, t), e_j)_{L^2}$ , de sorte que  $u_j \in C((0, T]; \mathbb{C})$ .<sup>1</sup> L'égalité  $u = 0$  revient à  $u_j = 0$ ,  $\forall j$ . Soient  $\zeta \in C_c^\infty((0, T))$ ,  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  et

$$\varphi(x, t) = \zeta(t)\psi(x), \quad \forall (x, t) \in \Omega_T.$$

En reprenant le calcul de l'étape 3, on trouve

$$0 = Lu(\varphi) = u(-\partial_t \varphi - \Delta_x \varphi) = \int (-u(x, t)\zeta'(t)\psi(x) + \zeta(t)\nabla_x u(x, t) \cdot \nabla \psi(x)) dx dt. \quad (6.8)$$

En notant que l'intégrande dans (6.8) est majorée comme suit

$$\begin{aligned} |(-u(x, t)\zeta'(t)\psi(x) + \zeta(t)\nabla_x u(x, t) \cdot \nabla \psi(x))| &\leq \|\zeta'\|_{L^\infty} \max_{t \in \text{supp } \zeta} \|u(\cdot, t)\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\ &\quad + \|\zeta\|_{L^\infty} \max_{t \in \text{supp } \zeta} \|\nabla_x u(\cdot, t)\|_{L^2} \|\nabla \psi\|_{L^2}, \end{aligned}$$

on obtient que la dernière intégrale dans (6.8) est continue, en tant que fonction de  $\psi$ , pour la norme de  $H_0^1(\Omega)$ . Par densité de  $C_c^\infty(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , on trouve que (6.8) reste vraie pour  $\zeta \in C_c^\infty((0, T))$  et  $\psi \in H_0^1(\Omega)$ . En particulier, pour  $\psi = e_j$ , on trouve

$$0 = \int (-u(x, t)\zeta'(t)e_j(x) + \zeta(t)\nabla_x u(x, t) \cdot \nabla e_j(x)) dx dt = \int (-u_j(t)\zeta'(t) + \lambda_j u_j(t)\zeta(t)) dt,$$

ou encore  $u_j' + \lambda_j u_j = 0$  dans  $\mathcal{D}'((0, T))$ . La continuité de  $u_j$  et l'Exercice 10.53 donne  $u_j(t) = C_j e^{-\lambda_j t}$ . Par ailleurs, 3 implique

$$0 = \lim_{t \searrow 0} [u(\cdot, t)](e_j) = \lim_{t \searrow 0} u_j(t) = 0,$$

d'où  $C_j = 0$ , ou encore  $u_j = 0$ . □

On considère ensuite le problème de Cauchy pour l'équation des ondes

$$\begin{cases} \square u = F & \text{dans } \Omega_T \\ u|_{t=0} = f & \text{dans } \Omega \\ u_t|_{t=0} = g & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_T \end{cases}. \quad (6.9)$$

1. En effet,  $(0, T] \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$  est continue, car  $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ . On utilise ensuite la continuité du produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ .

**6.9 Théorème.**

*Hypothèses.*  $\Omega \square \mathbb{R}^n$  borné.  $f \in H_0^1(\Omega)$ .  $g \in L^2(\Omega)$ .  $F \in L^2(\Omega_T)$ . On pose

$$u(\cdot, t) = \sum_j \left( \cos(\sqrt{\lambda_j}t)(f, e_j)_{L^2} + \frac{\sin(\sqrt{\lambda_j}t)}{\sqrt{\lambda_j}}(g, e_j)_{L^2} e_j + \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \int_0^t F_j(s) \sin(\sqrt{\lambda_j}(t-s)) ds \right) e_j.$$

Ici,  $F_j(t) = (F(\cdot, t), e_j)_{L^2}$ .

*Conclusions.*  $u$  est solution de (6.9) au sens suivant :

1.  $\square u = F$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega_T)$ .
2. On a  $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega))$ . (D'où  $tr u(\cdot, t) = 0, \forall t > 0$ .)
3. On a  $\lim_{t \searrow 0} u(\cdot, t) = f$  dans  $H_0^1(\Omega)$ .
4. On a  $u \in C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ .
5. On a  $\lim_{t \searrow 0} u_t(\cdot, t) = g$  dans  $L^2(\Omega)$ .

La solution  $u$  est uniquement déterminée par les propriétés 1-5.

**6.10 Remarque.** Dans les théorèmes 6.8 et 6.9, la régularité de  $u$  dépend de celle des données  $f$ ,  $g$  et  $F$  du problème. Pour des énoncés similaires sous d'autres hypothèses de régularité, voir par exemple [3, Chapter 10].

**Exercices**

**6.11 Exercice.** \* Soit  $I \subset \mathbb{R}$ . Soit  $(a_j)$  une suite de nombre réels. Soit  $(u_j) \subset C(I; \mathbb{C})$  une suite telle que  $|u_j(t)| \leq a_j, \forall j, \forall t$ . On pose, du moins formellement,

$$u(\cdot, t) = \sum_j u_j(t) e_j.$$

1. Si  $\sum a_j^2 < \infty$ , montrer que

$$I \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$$

est continue.

2. Si  $\sum \lambda_j a_j^2 < \infty$ , montrer que

$$I \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$$

est continue.

3. Si  $\sum \frac{a_j^2}{\lambda_j} < \infty$ , montrer que

$$I \ni t \mapsto u(\cdot, t) \in H^{-1}(\Omega)$$

est continue.

Enoncer la variante locale<sup>2</sup> de ce résultat.

**6.12 Exercice.** \* Soit  $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ . Montrer que

$$\sum \lambda_j^2 |(u, e_j)_{L^2}|^2 = \|\Delta u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^2}^2 < \infty.$$

2. C'est-à-dire, lorsque la domination globale  $|u_j(t)| \leq a_j$  est remplacée par une domination sur les compacts.

**6.13 Exercice.** \* Montrer que, dans le Théorème 6.8, l'unicité de  $u$  est vraie si l'hypothèse 2 est remplacée par l'hypothèse plus faible  $u \in L^1_{loc}((0, T); H^1_0(\Omega))$ .

**6.14 Exercice.** \* On se place dans le cadre du Théorème 6.8. Montrer que, si  $T \in L^2(\Omega)$  et  $F \in L^2(\Omega_T)$ , alors  $\lim_{t \rightarrow 0} u(\cdot, t) = T$  dans  $L^2(\Omega)$ .

**6.15 Exercice.** \* Énoncer et prouver un résultat sur la séparation des variables pour le problème de Cauchy pour l'équation de Schrödinger.



## **Troisième partie**

# **Outils d'analyse pour les équations aux dérivées partielles**



# Chapitre 7

## Rappels de topologie et analyse fonctionnelle

### Topologie induite par une famille de semi-normes

Le cadre général de la discussion qui suit est le suivant : étant donnée une famille de fonctions  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , trouver la topologie la moins fine sur  $X$  telle que chaque  $f_i$  soit continue. La topologie  $\tau$  obtenue est la *topologie induite par la famille*  $(f_i)_{i \in I}$ , et nous avons

$$V \text{ voisinage de } x \iff \exists J \subset I \text{ finie, } \exists \varepsilon > 0 \text{ tels que } \{y \in X ; |f_i(y) - f_i(x)| < \varepsilon, \forall i \in J\} \subset V; \quad (7.1)$$

voir [2, Section 3.1], [3, Section 3.1] pour une description différente mais équivalente de  $\tau$ .<sup>1</sup>

Un cas particulier familier : si  $X$  est normé, et si nous considérons la famille des applications  $X \ni x \mapsto x^*(x) \in \mathbb{R}$ , avec  $x^* \in X^*$ , alors on reconnaîtra à partir de (7.1) que  $\tau$  est la *topologie faible sur*  $X$ .

Considérons maintenant le cas particulier où  $X$  est un espace vectoriel muni d'une norme  $\| \cdot \|$ , et les applications

$$x \mapsto \|x - y\|, \quad y \in X. \quad (7.2)$$

Dans ce cas, on peut montrer avec un peu de travail que la topologie  $\tau$  coïncide avec la topologie de la norme. Ainsi, la topologie induite par les boules

$$B(x, r) = \{y \in X ; \|y - x\| < r\}, \quad x \in X, r > 0,$$

coïncide avec la topologie induite par les applications de (7.2).

Le même phénomène se produit quand on remplace la norme par une semi-norme, dont nous rappelons la définition.

**7.1 Définition.** Une semi-norme sur l'espace vectoriel  $X$  est une application  $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  (quand  $x \in X$  et  $\lambda$  est un scalaire dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) et  $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ ,  $\forall x, y \in X$ .<sup>2</sup>

Une semi-distance sur un ensemble  $Y$  est une application  $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $d(x, y) = d(y, x)$  et  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in Y$ .<sup>3</sup>

Clairement, si  $p$  est une semi-norme alors  $(x, y) \mapsto p(x - y)$  est une semi-distance sur  $X$ .

---

1. Exercice au passage : montrer que les deux descriptions de  $\tau$  sont équivalentes.

2. Il manque l'exigence  $p(x) = 0 \implies x = 0$  pour faire de  $p$  une norme.

3. Pour rendre  $d$  une distance, il faut ajouter la condition  $d(x, y) = 0 \implies x = y$ .

Comme pour une norme, il y a égalité entre la topologie induite par  $p$ , la topologie associée à la semi-distance correspondante, et la topologie induite par les applications  $x \mapsto p(x - y)$ ,  $y \in X$ .

Le cas d'une famille arbitraire  $(p_i)_{i \in I}$  de semi-normes est analogue...sauf qu'il n'y pas forcément une semi-distance engendrant la topologie.

**7.2 Proposition.** Soit  $(p_i)_{i \in I}$  une famille de semi-normes sur l'espace vectoriel  $X$ . Alors la topologie engendrée par les « boules »

$$\{y \in X; p_i(y - x) < r\}, \quad i \in I, x \in X, r > 0,$$

coïncide avec la topologie induite par les applications

$$x \mapsto p_i(x - y), \quad i \in I, y \in X.$$

Pour cette topologie, nous avons

$$V \text{ voisinage de } x \iff \exists J \subset I \text{ finie, } \exists \varepsilon > 0 \text{ tels que } \{y \in X; p_i(y - x) < \varepsilon, \forall i \in J\} \subset V. \quad (7.3)$$

La topologie ci-dessus est la *topologie induite par les semi-normes*  $(p_i)_{i \in I}$ .

Pour motiver la suite, rappelons que si  $X$  et  $Y$  sont normés et si  $T : X \rightarrow Y$  est linéaire, alors  $T$  est continu si et seulement si  $\exists C$  tel que  $\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$ ,  $\forall x \in X$ . Il existe un critère analogue pour les topologies induites par des familles de semi-normes. Pour simplifier la compréhension, nous donnerons ce critère dans plusieurs cas. Considérons trois espaces :  $X$  avec une topologie induite par les semi-normes  $(p_i)_{i \in I}$ ,  $Y$  équipé de semi-normes  $(q_l)_{l \in L}$ , et  $Z$  normé par  $\|\cdot\|$ . Considérons aussi  $T$  une application linéaire.

**7.3 Proposition.** 1.  $T : X \rightarrow Z$  est continue ssi  $\exists C$  et  $J \subset I$  finie telles que

$$\|Tx\| \leq C \sum_{i \in J} p_i(x), \quad \forall x \in X.$$

2.  $T : Z \rightarrow X$  est continue ssi :  $\forall i \in I, \exists C$  telle que

$$p_i(Tz) \leq C\|z\|, \quad \forall z \in Z.$$

3.  $T : X \rightarrow Y$  est continue ssi :  $\forall l \in L, \exists C$  et  $J \subset I$  finie telles que

$$q_l(Tx) \leq C \sum_{i \in J} p_i(x), \quad \forall x \in X.$$

Retour à la topologie  $\tau$  engendrée par  $(p_i)_{i \in I}$  sur  $X$ . En général,  $\tau$  ne coïncide pas avec la topologie définie par une semi-distance sur  $X$ . Néanmoins, nous avons le résultat suivant, qui est un avatar du fait que si  $X$  est un espace de Banach de dual  $X^*$  séparable, alors la topologie faible sur la boule unité de  $X$  provient d'une distance.

**7.4 Proposition.** Soit  $I$  (au plus) dénombrable. Alors  $\tau$  est engendrée par une semi-distance. Si, de plus, il existe  $i_0 \in I$  tel que  $p_{i_0}$  soit une norme, alors  $d$  est une distance.

Il y a une formule explicite donnant  $d$ . Pour simplifier cette formule, supposons  $I = \mathbb{N}$ . Alors on peut choisir

$$d(x, y) = \sum_{i \geq 0} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)}, \quad \forall x, y \in X.$$

Quelques propriétés immédiates de  $d$ .



**7.5 Proposition.** Soient  $(x_j) \subset X$  et  $x \in X$ . Alors

1.  $x_j \rightarrow x \iff p_i(x_j - x) \rightarrow 0, \forall i \in I.$
2.  $(x_j)$  est une suite de Cauchy pour  $d \iff \lim_{j,k \rightarrow \infty} p_i(x_j - x_k) = 0, \forall i \in I.$

En particulier, si  $(x_j)$  est une suite de Cauchy alors  $(p_i(x_j))_j$  est bornée,  $\forall i \in I.$

Enfin (mais ce point de vue ne sera pas utilisé par la suite), il est possible de définir de manière axiomatique les espaces munis d'une famille de semi-normes ; les espaces vérifiant ces axiomes sont des *espaces localement convexes*.

Quelques références pour trouver les preuves de la plupart de ces résultats (preuves qui sont de simples manipulations des définitions ; rien de profond). La source la plus claire pour les espaces localement convexes est Rudin [17, pp. 25–30]. Voir aussi Bourbaki [1, EVT II.25–EVT II.26], Edwards [5, pp. 77–80], et, pour le début de cette section, Brezis [2, Section 3.1], [3, Section 3.1].



# Chapitre 8

## Intégration et analyse géométrique

### Hölder

#### 8.1 Proposition (Inégalité de Hölder).

*Hypothèses.*  $X$  espace mesuré.  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  mesurables.  $p$  et  $q$  conjugués.

*Conclusions.*  $fg \in L^1$  et  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ . En particulier,  $\left| \int fg \right| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

#### 8.2 Corollaire.

*Hypothèses.*  $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq \infty$ . On écrit  $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ , avec  $\theta \in [0, 1]$ .  $f \in L^{p_1} \cap L^{p_2}$ .

*Conclusion.*  $f \in L^p$  et  $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_1}}^\theta \|f\|_{L^{p_2}}^{1-\theta}$ .

### Régularisation

**8.3 Définition.** Une suite  $(\varphi^j)_{j \in \mathbb{N}^*}$  est une  $\delta$ -suite si

1.  $\varphi^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  est intégrable positive,  $\forall j \in \mathbb{N}^*$ .
2. Pour tout  $R > 0$ ,  $\int_{B(0,R)} \varphi^j \rightarrow 1$  quand  $j \rightarrow \infty$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^j \rightarrow 1$  quand  $j \rightarrow \infty$ .

On définit, de manière analogue, une  $\delta$ -famille  $(\varphi^\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ .

On rappelle la notation suivante : si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  et  $\varepsilon > 0$ ,  $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ .

#### 8.4 Exemple (Exemple fondamental).

*Hypothèses.*  $\rho$  est intégrable positive d'intégrale 1 sur  $\mathbb{R}^n$ .

*Conclusion.*  $(\rho_\varepsilon)$  est une  $\delta$ -famille, et  $(\rho_{1/(j+1)})$  est une  $\delta$ -suite.

Si, de plus, on a  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $\text{supp } \rho \subset B(0, 1)$ , alors  $\rho$  est appelé un noyau régularisant, et la famille  $(\rho_\varepsilon)$  (respectivement la suite  $(\rho_{1/(j+1)})$ ) est désignée comme famille régularisante (respectivement suite régularisante).

Rappelons l'un des intérêts des  $\delta$ -familles ou suites.

#### 8.5 Théorème (Approximation).

*Hypothèse.*  $(\rho^\varepsilon)$  est une  $\delta$ -famille.

*Conclusions.*

1. Si  $1 \leq p < \infty$  et  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f * \rho^\varepsilon \rightarrow f$  dans  $L^p$ .

2. Si  $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f * \rho^\varepsilon \rightarrow f$  uniformément sur les compacts.
3. Si  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors on a l'équivalence :
  - (a)  $f * \rho^\varepsilon \rightarrow f$  uniformément.
  - (b)  $f$  est bornée et uniformément continue.

Dans le cas particulier où on considère une famille régularisante, on obtient la conséquence suivante.

### 8.6 Corollaire.

*Hypothèse.*  $1 \leq p < \infty$ .

*Conclusion.*  $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Rappelons au passage l'un des ingrédients de la preuve du Théorème 8.5.

### 8.7 Proposition.

*Hypothèses.*  $1 \leq p < \infty$ .  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

*Conclusion.* On a  $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0$ .

Dans le même esprit, on a

### 8.8 Proposition.

*Hypothèses.*  $u \in C_b(\mathbb{R}^n \times [0, \varepsilon_0])$ .  $(\rho^\varepsilon)$  est une  $\delta$ -famille.

*Conclusion.* On a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \rho^\varepsilon(x) u(x, \varepsilon) dx = u(0, 0). \quad (8.1)$$

En particulier, si  $u \in C_b(\mathbb{R}^n)$ , alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \rho^\varepsilon(x) u(x) dx = u(0). \quad (8.2)$$

Dans le cas particulier d'une famille régularisante, on peut renoncer à l'hypothèse  $u$  bornée.

*Démonstration.* Si  $R > 0$ , alors

$$\begin{aligned} \left| \int \rho^\varepsilon(x) u(x, \varepsilon) dx - u(0, 0) \right| &\leq \int_{B(0, R)} \rho^\varepsilon(x) |u(x, \varepsilon) - u(0, 0)| dx \\ &\quad + |u(0, 0)| \left| \int_{B(0, R)} \rho^\varepsilon(x) dx - 1 \right| \\ &\quad + \|u\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)} \rho^\varepsilon(x) dx \\ &= \sup_{B(0, R)} |u(x, \varepsilon) - u(0, 0)| + o(1) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On trouve

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int \rho^\varepsilon(x) u(x, \varepsilon) dx - u(0, 0) \right| \leq \inf_{R > 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{B(0, R)} |u(x, \varepsilon) - u(0, 0)| = 0.$$

Si la famille  $(\rho^\varepsilon)$  est régularisante, alors l'intégrale sur  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)$  vaut 0 pour  $\varepsilon$  petit, et le fait que  $u$  soit bornée n'intervient plus.  $\square$

$L_{loc}^p$ 

**8.9 Définition.** Si  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ , alors  $L_{loc}^p(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions mesurables sur  $\Omega$  telles que  $f \in L^p(K)$ ,  $\forall K \Subset \Omega$ .

On définit dans  $L_{loc}^p(\Omega)$  la notion suivante de convergence :  $f_j \rightarrow f$  dans  $L_{loc}^p(\Omega)$  si  $f_j \rightarrow f$  dans  $L^p(K)$ ,  $\forall K \Subset \Omega$ . Ceci a un sens si  $f_j \in L_{loc}^p(\Omega)$  pour tout  $j$  ou, plus généralement, si pour tout  $K \Subset \Omega$  il existe  $j_0$  tel que  $f_j \in L^p(K)$  pour  $j \geq j_0$ .

### 8.10 Proposition.

*Hypothèses.*  $1 \leq r \leq p \leq \infty$ .  $f_j \rightarrow f$  dans  $L^p(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $f_j \rightarrow f$  dans  $L_{loc}^r(\Omega)$ .

Notons  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ . Si  $\rho$  est un noyau régularisant et  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ , alors  $f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ .

### 8.11 Proposition.

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $1 \leq r \leq p < \infty$ .  $f \in L_{loc}^p(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $f * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$  dans  $L_{loc}^r(\Omega)$ .

## Identités remarquables

**8.12 Proposition** ( $\Gamma$ ,  $\sigma_n$ ,  $\omega_n$ ). On a

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \forall x > 0, \quad (8.3)$$

$$\sigma_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad (8.4)$$

$$\omega_n = \frac{\sigma_n}{n} = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}. \quad (8.5)$$

## Lemme de Sard

**8.13 Définition.** Soit  $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ , avec  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .

[1.]

1.  $x \in \Omega$  est un point critique de  $\varphi$  si  $\nabla\varphi(x) = 0$ .
2.  $t \in \mathbb{R}$  est une valeur critique de  $\varphi$  s'il existe un point critique de  $\varphi$  tel que  $t = \varphi(x)$ .
3.  $t \in \mathbb{R}$  est une valeur régulière de  $\varphi$  si  $t$  n'est pas une valeur critique de  $\varphi$ .<sup>1</sup>

**8.14 Théorème** (Lemme de Sard).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ .

*Conclusion.* L'ensemble des valeurs critiques de  $\varphi$  est (Lebesgue) négligeable.

De manière équivalente, presque tout  $t \in \mathbb{R}$  est une valeur régulière.

---

1. Une valeur régulière n'est pas forcément une valeur de la fonction. Plus précisément, si  $t \notin \varphi(\Omega)$ , alors  $t$  est une valeur régulière de  $\varphi$ .

## Ouverts réguliers

Dans cette partie,  $X$  désigne un espace de fonctions parmi :  $Lip$ ,  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $C^{k,\alpha}$ ,  $k \geq 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $C^\infty$ ,  $C^\omega$  (les fonctions développables en série).

**8.15 Définition.** Un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est de classe  $X$  si pour tout  $x_0 \in \partial\Omega$  il existe  $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^n$  et une isométrie  $R \in \mathcal{O}(n)$  tels que  $U = R(V \cap \Omega)$  soit de la forme

$$\{x = (x', x_n) \in R(V); x_n > \psi(x')\},$$

où  $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $X$ .

En d'autres termes, un ouvert de classe  $X$  est, localement et à une isométrie près, l'épigraphe d'une fonction de classe  $X$ .

Un critère pratique simple de régularité des ouverts est la conséquence suivante du théorème des fonctions implicites.

### 8.16 Proposition.

*Hypothèses.*  $k \in \mathbb{N}^*$ .  $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ .  $t$  est valeur régulière de  $\varphi$ , c'est-à-dire si  $\varphi(x) = t$ , alors  $\nabla\varphi(x) \neq 0$ .

De manière équivalente, le système 
$$\begin{cases} \varphi(x) = t \\ \nabla\varphi(x) = 0 \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution.}$$

*Conclusions.*

1.  $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n; \varphi(x) < t\}$  est un ouvert de classe  $C^k$ .
2. La normale extérieure à  $\Omega$  est donnée par  $\nu(x) = \frac{\nabla\varphi(x)}{|\nabla\varphi(x)|}$ .

*Conclusions analogues si  $\varphi \in C^{k,\alpha}$ , ou  $k \geq 1$  et  $0 < \alpha < 1$ .*

### 8.17 Définition. [1.]

1. Un cône (tronqué, mais communément désigné comme un cône tout court) standard est un ensemble de la forme

$$\mathcal{C} = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 \leq x_n \leq a, |x'| \leq b|x_n|\},$$

avec  $a, b > 0$ .

2. Un cône  $C$  de sommet  $x$  est un ensemble de la forme  $x + R(\mathcal{C})$ , avec  $\mathcal{C}$  cône standard et  $R \in \mathcal{O}(n)$ .
3. Un ouvert  $\Omega$  a la propriété du cône extérieur si pour tout  $x_0 \in \partial\Omega$  il existe un cône  $C$  de sommet  $x_0$  tel que  $C \cap \Omega = \emptyset$ . On définit de même la propriété du cône intérieur.
4. Un ouvert  $\Omega$  a la propriété de la boule extérieure si pour tout  $x_0 \in \partial\Omega$  il existe une boule  $B$  telle  $x_0 \in \partial B$  et  $B \cap \Omega = \emptyset$ . On définit de même la propriété de la boule intérieure.

### 8.18 Proposition.

*Hypothèse.*  $\Omega$  lipschitzien.

*Conclusions.*  $\Omega$  a la propriété du cône extérieur et du cône intérieur.

### 8.19 Proposition.

*Hypothèse.*  $\Omega \in C^2$ .

*Conclusions.*  $\Omega$  a la propriété de la boule extérieure et de la boule intérieure.

## Fonctions régulières

Si  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert, une définition possible d'une fonction  $f$  de classe  $C^1$  sur  $\bar{I}$  est la suivante :  $f \in C(\bar{I})$ ,  $f \in C^1(I)$ , et  $f'$  se prolonge par continuité à  $\bar{I}$ . Par ailleurs, il est aisé de voir que, si  $f \in C^1(\bar{I})$ , alors  $f$  a une extension  $g \in C^1(\mathbb{R})$ .

### 8.20 Théorème (Whitney).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert lipschitzien.  $k \in \mathbb{N}^*$ .  $f \in C^k(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

*Conclusion.* Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une fonction  $g \in C^k(\mathbb{R}^n)$  telle que  $g|_{\Omega} = f$ .
2. Les dérivées partielles d'ordre  $\leq k$  de  $f$  se prolonge par continuité à  $\bar{\Omega}$ .

Une fonction de classe  $C^k(\bar{\Omega})$  est une fonction satisfaisant 1. ou 2. ci-dessus.

## Changements de variables

### 8.21 Théorème (Théorème de changement de variables).

*Hypothèses.*  $\Phi : U \rightarrow V$  est un  $C^1$ -difféomorphisme entre les ouverts  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ .  $f : V \rightarrow \mathbb{C}$  est borélienne.

*Conclusion.* On a

$$\int_V f(x) dx = \int_U f(\Phi(y)) |J_{\Phi}(y)| dy. \quad (8.6)$$

Ici,  $J_{\Phi}$  est le (déterminant) jacobien de  $\Phi$ .

Le sens de cette égalité est le suivant : si l'une des deux intégrales ci-dessus existe, alors l'autre existe aussi et elles sont égales.

Même formule si  $\Phi$  est un presque  $C^1$ -difféomorphisme, c'est-à-dire  $\Phi$  est borélienne et il existe  $K \subset U$  et  $L \subset V$  fermés négligeables tels que  $\Phi : U \setminus K \rightarrow V \setminus L$  soit un  $C^1$ -difféomorphisme.

Même conclusion sous les hypothèses encore plus faibles  $\Phi$  borélienne et  $\Phi : U \setminus K \rightarrow V \setminus L$  localement lipschitzienne et bijective.

**8.22 Remarque.** La première partie du Théorème 8.21 est la forme usuelle du théorème de changement de variables. La deuxième partie n'en est qu'une variante immédiate. En revanche, la troisième variante est plus délicate ; voir par exemple [7, Section 3.3.3, Theorem 2, p. 99]. Lorsque  $\Phi$  est seulement lipschitzienne, elle n'est pas forcément différentiable ; néanmoins, le membre de droite de (8.6) a un sens, car  $\Phi$  est différentiable p. p. (Théorème de Rademacher 8.36).

Un presque changement de variables fondamental est donné par les coordonnées sphériques généralisées

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi], \quad (r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \theta) \mapsto (x_1, \dots, x_n) \quad (8.7)$$

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \cos \theta \\ x_2 = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2} \sin \theta \\ x_3 = r \sin \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2} \\ \vdots \\ x_{n-1} = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\ x_n = r \cos \varphi_1 \end{cases}, \quad (8.8)$$

de jacobien

$$|J_{\Phi}(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \theta)| = r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2}. \quad (8.9)$$

On retiendra en particulier la formule

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{n-2 \text{ fois}} \int_0^{2\pi} f \circ \Phi r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} d\theta d\varphi_{n-2} \dots d\varphi_1 dr, \quad (8.10)$$

l'égalité étant interprétée au sens du Théorème 8.21. A  $r$  fixé, l'application  $\Phi$  sert à presque paramétrer la sphère  $S(0, r)$ . Le jacobien (élément de surface) de cette paramétrisation est encore donné par (8.9), ce qui donne, pour  $f : S(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne,

$$\int_{S(0, r)} f(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = r^{n-1} \underbrace{\int_0^\pi \dots \int_0^\pi}_{n-2 \text{ fois}} \int_0^{2\pi} f \circ \Phi \sin^{n-2} \varphi_1 \dots \sin \varphi_{n-2} d\theta d\varphi_{n-2} \dots d\varphi_1. \quad (8.11)$$

Pour quelques conséquences des formules (8.10)-(8.11), voir les Exercices 8.40-8.43.

## Formule de la co-aire

On peut obtenir l'identité (8.10) soit par vérification directe, soit comme corollaire du résultat suivant, qui peut être vu comme la généralisation à la fois du théorème de changement de variables et du théorème de Fubini.

### 8.23 Théorème (Formule de la co-aire).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $\varphi \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ .  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne.

*Conclusions.* Pour presque  $t \in \mathbb{R}$ , l'ensemble  $[\varphi = t]$  est une  $C^1$  variété, et

$$\int_{\Omega} f(x) |\nabla \varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{[\varphi=t]} f(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \right) dt. \quad (8.12)$$

Ici, l'égalité est dans le sens du théorème de changement de variables : l'une des intégrales a un sens si et seulement l'autre en a, et dans ce cas les deux intégrales sont égales. En particulier, (8.12) est vraie si  $f \geq 0$ .

## Théorème flux-divergence et applications

L'hypothèse (HC), qui apparaît dans toutes les applications du théorème flux-divergence (Théorème 8.24) est qu'au moins l'un des objets considérés est à support compact. Ceci ne sera pas détaillé à chaque fois ; on se contente de donner deux exemples :

1. Dans l'identité  $\int_{\Omega} \operatorname{div} F d\lambda_n = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F d\mathcal{H}^{n-1}$ , on suppose soit  $F$  à support compact, soit  $\Omega$  relativement compact.
2. Dans l'identité  $\int_{\Omega} f \partial_j g d\lambda_n = \int_{\partial\Omega} \nu_j f g d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} (\partial_j f) g d\lambda_n$ , on suppose : l'une des  $u$  et  $v$  à support compact, ou  $\Omega$  relativement compact.



**8.24 Théorème** (Théorème du flux-divergence).

*Hypothèses.*  $\Omega$  est un ouvert Lipschitz.  $F \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ . On a (HC).

*Conclusion.* On a

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, d\lambda_n = \int_{\partial\Omega} \nu \cdot F \, d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (8.13)$$

**8.25 Corollaire** (Intégration par parties).

1.

*Hypothèses.*  $f \in C^1(\Omega)$ ,  $g \in C_c^1(\Omega)$ .

*Conclusion.*

$$\int_{\Omega} f \partial_j g = - \int_{\Omega} (\partial_j f) g. \quad (8.14)$$

2.

*Hypothèses.*  $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$ .  $\Omega$  Lipschitz. On a (HC).

*Conclusion.*

$$\int_{\Omega} f \partial_j g \, d\lambda_n = \int_{\partial\Omega} \nu_j f g \, d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} (\partial_j f) g \, d\lambda_n. \quad (8.15)$$

**Convolution**

Si  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  sont mesurables (sans hypothèse d'intégrabilité), on pose

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) \, dy. \quad (8.16)$$

**8.26 Théorème** (Inégalité de Young).

*Hypothèses.*  $1 \leq p, q \leq \infty$  sont tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ . On pose  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ . On se donne  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ .

*Conclusions.*

1. Pour presque tout  $x$ ,  $f * g(x)$  est bien défini, et la fonction  $f * g$  est mesurable.

2.  $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$  et  $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

3. Dans le cas particulier où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , on a  $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$  et  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f * g(x) = 0$ .

**8.27 Proposition.**

*Hypothèses.*  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

*Conclusions.*  $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $P(\partial)(f * g) = f * (P(\partial)g)$ .

**Transformée de Fourier**

Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors la transformée de Fourier de  $f$  est  $\hat{f} = \mathcal{F}f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) \, dx. \quad (8.17)$$

**8.28 Théorème.**

*Hypothèse.*  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

*Conclusions.*

1.  $\hat{f}$  est continue et  $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$ .
2. (Lemme de Riemann-Lebesgue)  $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ .
3. Si  $f \in L^1_c$ , ou plus généralement si  $|x|^k f \in L^1$ , alors  $\mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi) = i^{|\alpha|} \partial^\alpha \hat{f}(\xi)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = k$ .
4. Si  $f \in C^k$  et  $D^k f \in L^1$ , alors  $\mathcal{F}(\partial^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$ ,  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = k$ .
5. Si  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , alors  $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f} \hat{g}$ .
6. (Théorème d'inversion) Si  $\hat{f} \in L^1$ , alors

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \hat{f}(\xi) d\xi \quad p. p. \quad (8.18)$$

En particulier,  $f$  a un représentant continu, pour lequel (8.18) est vraie partout.

**8.29 Corollaire.** La transformée de Fourier  $\mathcal{F}$  est injective dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

Une gaussienne est une application de la forme  $x \mapsto e^{-\langle Ax, x \rangle}$ , où  $A$  est une matrice complexe telle que  $\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \geq C|x|^2$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ , pour un  $C > 0$ . Cas particulier :  $f_a(x) = e^{-a|x|^2}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} a > 0$ .

**8.30 Proposition.** On a  $\mathcal{F}f_a(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right)^n e^{-|\xi|^2/(4a)}$ .

Ici,  $\sqrt{\phantom{x}}$  est la racine complexe principale : si  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ , alors  $\sqrt{z}$  est le seul complexe  $w$  tel que  $w^2 = z$  et  $\operatorname{Re} w > 0$ .

*Démonstration.* Le théorème de Fubini ramène le cas général au cas  $n = 1$ . Soit  $\Omega = \{a \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} a > 0\}$ . Soit  $\xi \in \mathbb{R}$ . Les fonctions

$$\Omega \ni a \mapsto u(a) = \mathcal{F}f_a(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi - ax^2} dx, \quad v(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/(4a)}$$

sont holomorphes dans  $\Omega$ . Elles coïncident en  $a = 1$  et, par changement de variables, sur  $(0, \infty)$ . Le théorème d'identité des fonctions holomorphes implique  $u = v$  dans  $\Omega$ .  $\square$

Pour la formule de la transformée de Fourier d'une gaussienne quelconque, voir [14, Theorem 7.6.1, p. 206].

**8.31 Théorème (Plancherel).** L'application

$$L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f}$$

prend ses valeurs dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  et s'étend comme un opérateur unitaire dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Exhaustion****8.32 Proposition.**

*Hypothèse.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .

*Conclusion.* Il existe une suite  $(\omega_k)$  d'ouverts tels que

[1.]

1.  $\omega_k$  relativement compact dans  $\Omega$  :  $\overline{\omega_k} \Subset \Omega$ .
2.  $\omega_k$  relativement compact dans  $\omega_{k+1}$  :  $\overline{\omega_k} \Subset \omega_{k+1}$ .
3.  $\Omega = \cup \omega_k$ .
4.  $\omega_k \in C^\infty$ .

## Partition de l'unité

Une partition de l'unité est une décomposition convenable de la fonction constante 1 en somme de fonctions positives.

### 8.33 Proposition.

*Hypothèses.*  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact.  $(\omega_j)$  recouvrement ouvert fini de  $K$ .

*Conclusions.* Il existe  $\varphi_j \in C_c^\infty(\omega_j)$  telles que :

- a)  $0 \leq \varphi_j \leq 1$ .
- b)  $\sum \varphi_j = 1$  dans  $K$ .

### 8.34 Proposition.

*Hypothèse.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

*Conclusions.* Il existe des ouverts  $\omega_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  et des fonctions  $\zeta_j \in C_c^\infty(\omega_j)$  tels que :

- a) Pour chaque  $x \in \Omega$ , il existe un  $R = R(x) > 0$  tel que  $B(x, R)$  rencontre au plus deux  $\omega_j$ .
- b)  $0 \leq \varphi_j \leq 1$ .
- c)  $\sum \varphi_j = 1$  dans  $\Omega$ .

## Principe de localisation

### 8.35 Proposition (Principe de localisation).

*Hypothèses.*  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ .  $\int_{\Omega} f \varphi = 0$ ,  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ .

*Conclusion.* On a l'équivalence :  $f = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $g$  une fonction mesurable à support compact telle que  $|g| \leq 1$ . Alors il existe une suite  $(g_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$  telle que  $g_j \rightarrow g$  p. p.,  $|g_j| \leq 1$  et les supports des  $g_j$  soient contenus dans un compact fixé  $K \Subset \Omega$  (Exercice 8.48). Par convergence dominée (en majorant les intégrandes avec  $|f| \mathbb{1}_K$ ), on a  $\int f g_j \rightarrow \int f g$ , d'où  $\int f g = 0$  pour tout  $g$  comme ci-dessus.

Soit  $(\omega_k)$  une exhaustion de  $\Omega$ . Pour  $g = \operatorname{sgn} f \mathbb{1}_{\omega_k}$ , on trouve  $\int_{\omega_k} |f| = 0$ . En faisant  $k \rightarrow \infty$ , on trouve  $\int_{\Omega} |f| = 0$ , d'où  $f = 0$ . □

## Fonctions lipschitziennes

Une fonction lipschitzienne n'est pas forcément différentiable ; l'exemple typique est  $x \mapsto |x|$ . Néanmoins, on a le résultat suivant.

### 8.36 Théorème (Théorème de Rademacher).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  localement lipschitzienne.

*Conclusion.*  $f$  est différentiable p. p.

Pour une preuve, voir [7, Section 3.1.1, Theorem 1, Section 3.1.2, Theorem 2, pp. 80-81].

## Interpolation

### 8.37 Théorème (Théorème d'interpolation de Riezs-Thorin).

*Hypothèses.*  $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ .  $\theta \in [0, 1]$ .  $\frac{1}{p} := \frac{\theta}{p_0} + \frac{1-\theta}{p_1}$ .  $\frac{1}{q} := \frac{\theta}{q_0} + \frac{1-\theta}{q_1}$ .

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{G}, \nu)$  espaces mesurés.  $T : L^{p_0} \cap L^{p_1}(X) \rightarrow L^{q_0} \cup L^{q_1}(Y)$  linéaire.

$\|Tf\|_{L^{q_j}} \leq M_j \|f\|_{L^{p_j}}$ ,  $\forall f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}(X)$ ,  $\forall j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$ .

*Conclusion.*  $\|Tf\|_{L^q} \leq M_0^\theta M_1^{1-\theta} \|f\|_{L^p}$ ,  $\forall f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}(X)$ .

## Exercices

### 8.38 Exercice.

*Hypothèses.*  $1 \leq p < \infty$ .  $f \in L^p(\mathbb{R}_+^n)$ .  $f_\varepsilon(t, x') := f(t + \varepsilon, x')$ ,  $\forall t > 0$ ,  $\forall x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ .

*Conclusion.*  $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$  dans  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ .

### 8.39 Exercice. \*

*Hypothèses.*  $\rho$  est intégrable positive d'intégrale 1.  $R(\varepsilon) > 0$  est tel que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\varepsilon) = \infty$ .

*Conclusion.*  $(\rho_\varepsilon \mathbb{1}_{B(0, R(\varepsilon)\varepsilon)})$  est une  $\delta$ -famille.

### 8.40 Exercice. \* (Intégrale des fonctions radiales)

*Hypothèse.*  $f : (0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  est mesurable.

*Conclusion.* On a

$$\int_{B(0, R)} f(|x|) dx = \sigma_n \int_0^R r^{n-1} f(r) dr. \quad (8.19)$$

### 8.41 Exercice. \* (Intégrales de référence)

*Hypothèses.*  $R > 0$ .  $a \in \mathbb{R}$ .

*Conclusions.*

1.  $\int_{B(0, R)} \frac{1}{|x|^a} dx$  converge si et seulement si  $a < n$ .
2.  $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, R)} \frac{1}{|x|^a} dx$  converge si et seulement si  $a > n$ .

### 8.42 Exercice. \* (Changement de variables sur la sphère)

*Hypothèse.*  $u : S(x_0, r) \rightarrow \mathbb{R}$  est borélienne.

*Conclusions.*

$$\int_{S(x_0, r)} u(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) = r^{n-1} \int_{S(0, 1)} u(x_0 + rx) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

En particulier,  $\mathcal{H}^{n-1}(S(x_0, r)) = r^{n-1} \sigma_n$ .

### 8.43 Exercice. \* (Intégrale des fonctions arbitraires)

*Hypothèse.*  $u : B(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$  est mesurable.

*Conclusion.* On a

$$\int_{B(0, R)} u(x) dx = \int_0^R \int_{S(0, r)} u(x) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dr = \int_0^R r^{n-1} \int_{S(0, 1)} u(rx) d\mathcal{H}^{n-1}(x) dr. \quad (8.20)$$

En particulier,  $\nu_n(B(x_0, R)) = R^n \omega_n$  et  $\omega_n = \frac{\sigma_n}{n}$ .

**8.44 Exercice.**

*Hypothèses.*  $f : S(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  borélienne intégrable.  $A \in \mathcal{O}(n)$ .

*Conclusion.*  $\int_{S(0,1)} f \circ A = \int_{S(0,1)} f$ .

Cas particuliers :

1. Si  $f$  est impaire dans la variable  $x_j$ , alors  $\int_{S(0,1)} f = 0$ .
2.  $\int_{S(0,1)} x_j^2 = \frac{1}{n} \int_{S(0,1)} |x|^2 = \frac{\sigma_n}{n} = \omega_n$ .

**8.45 Exercice.** \*

1. Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $h \in \mathbb{R}^n$ , calculer  $\mathcal{F}(\tau_h f)$ .
2. Calculer  $\mathcal{F}(\mathbb{1}_I)$ , où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle.

**8.46 Exercice.** Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} dx = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}.$$

**8.47 Exercice.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-a|x|}$ , où  $a > 0$ . Montrer que

$$\hat{f}(\xi) = 2^n \pi^{(n-1)/2} \Gamma((n+1)/2) \frac{a}{(a^2 + |\xi|^2)^{(n+1)/2}}.$$

**8.48 Exercice.** Soit  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable, à support compact, telle que  $|g| \leq 1$ . Montrer qu'il existe une suite  $(g_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$  telle que  $g_j \rightarrow g$  p. p.,  $|g_j| \leq 1$  et  $\text{supp } g_j \subset K$ ,  $\forall j$ , où  $K \Subset \Omega$ .

## Indications

**Exercice 8.46.** En passant en coordonnées sphériques généralisées, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} dx = \sigma_n \underbrace{\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} dr}_{I_n},$$

et on est ramené à l'identité  $I_n = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n/2)}{2\Gamma((n+1)/2)}$ ; celle-ci se montre par récurrence de pas 2.

**Exercice 8.44.** On peut supposer  $f \geq 0$ . Soit  $g(x) = nf\left(|x| \frac{x}{|x|}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , qui est borélienne.

Par invariance par isométries de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ , on a  $\int_{B(0,1)} g \circ A = \int_{B(0,1)} g$ . En explicitant cette égalité à l'aide de la formule (8.20), on trouve la conclusion voulue.

Premier cas particulier : si, par exemple,  $j = n$ , on prend  $A(x', x_n) = -(x', x_n)$  et on obtient

$$\int_{S(0,1)} f = - \int_{S(0,1)} f.$$

Deuxième cas : si on prend  $f(x) = x_j^2$  et  $A$  l'application qui permute les coordonnées  $x_j$  et  $x_k$ ,

on trouve  $\int_{S(0,1)} x_j^2 = \int_{S(0,1)} x_k^2$ . En faisant la somme sur  $k$ , on trouve  $n \int_{S(0,1)} x_j^2 = \int_{S(0,1)} |x|^2 = \sigma_n$ .

**Exercice 8.48.** Soit  $0 < \delta < \text{dist}(\text{supp } g, \partial\Omega)$ . Soit  $\rho$  un noyau régularisant. Pour  $\varepsilon < \delta$ , on a  $|g * \rho_\varepsilon| \leq \|g\|_{L^\infty} \leq 1$ , et  $\text{supp}(g * \rho_\varepsilon) \subset K := \text{supp } g + \overline{B}(0, \varepsilon) \Subset \Omega$ . Comme  $g * \rho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} g$  dans  $L^1$  (ce qui entraîne, après extraction, la convergence p. p.), on peut choisir  $g_j = g * \rho_{\varepsilon_j}$ , avec  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  convenable.

# Chapitre 9

## Espaces de Sobolev

### Dérivées généralisées

**9.1 Définition.** Soient  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors  $g$  est la dérivée généralisée  $\partial_j f$  de  $f$  si

$$-\int_{\Omega} f \partial_j \varphi = \int_{\Omega} g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (9.1)$$

Plus généralement, si  $P(\partial)$  est un opérateur à coefficients constants, alors on a  $P(\partial)f = g$  au sens généralisé si

$$\int_{\Omega} f P(-\partial)\varphi = \int_{\Omega} g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (9.2)$$

**9.2 Remarque.** Le principe de localisation (Proposition 8.35) montre que  $g$  (si elle existe) est unique.

Pour quelques exemples de dérivées généralisées, voir les Exercices 9.50-9.54.

Le résultat qui suit sera prouvé en plus grande généralité dans le cadre de la théorie des distributions.

### 9.3 Proposition.

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$  connexe.  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $\nabla f = 0$ .<sup>1</sup>

*Conclusion.*  $f$  est constante.

*Démonstration.* La conclusion étant locale (dans un ouvert connexe, une fonction est constante si et seulement si elle est localement constante, cf Exercice 9.57), il suffit de considérer le cas où  $\Omega$  est un cube, par exemple  $\Omega = (-1, 1)^n$ . Soit  $\rho$  un noyau régularisant. Alors  $\nabla(f * \rho_\varepsilon) = 0$  dans  $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)^n \subset \Omega_\varepsilon$  (Lemme 9.5).<sup>2</sup> Il s'ensuit que  $f * \rho_\varepsilon = C_\varepsilon$  dans  $(-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)^n$ , pour une constante convenable. Le long d'une suite  $\varepsilon_j \rightarrow 0$ , on a  $f * \rho_{\varepsilon_j} \rightarrow f$  p. p. On trouve  $C_{\varepsilon_j} \rightarrow C$  et  $f = C$ .  $\square$

Le résultat suivant décrit (à  $g$  donnée) les fonctions  $f$  telles que  $\partial_j f = g$ . Pour simplifier, nous prenons, dans l'énoncé qui suit,  $j = 1$ .

### 9.4 Proposition.

*Hypothèses.*  $\Omega = I \times \omega$ .  $I$  intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ .  $\omega \sqsubset \mathbb{R}^{n-1}$ .  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $a \in I$ .

*Conclusion.* On a l'équivalence :

- 
1. C'est-à-dire les dérivées généralisées du premier ordre de  $f$  sont nulles.
  2. Rappelons la notation  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ .

1.  $\partial_1 f = g$ .

2. Il existe  $h \in L^1_{loc}(\omega)$  telle que  $f(x_1, x') = h(x') + \int_a^{x_1} g(t, x') dt$ .

Dans le cas  $n = 1$ , ceci devient  $f(x) = C + \int_a^x g(t) dt$ .

*Démonstration.* L'implication  $2 \implies 1$  suit de l'Exercice 9.53 combiné avec le théorème de Fubini et est laissée en exercice.

Pour l'implication inverse, notons d'abord que la conclusion est claire si  $f, g \in C^1$ . On applique cette remarque dans  $I_\varepsilon \times \omega_\varepsilon$  à  $f * \rho_\varepsilon$  et  $g * \rho_\varepsilon$ , où  $\rho$  est un noyau régularisant. Grâce au Lemme 9.5, on trouve

$$f * \rho_\varepsilon(x_1, x') = h_\varepsilon(x') + \underbrace{\int_a^{x_1} g * \rho_\varepsilon(t, x') dt}_{J_\varepsilon(x_1, x')}.$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a  $J_\varepsilon \rightarrow J$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ , où  $J(x_1, x') = \int_a^{x_1} g(t, x') dt$  (vérifier!). Par ailleurs, on a  $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ , d'où  $h_\varepsilon$  converge dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Comme  $h_\varepsilon$  ne dépend pas de  $x_1$ , la limite  $h$  est indépendante de  $x_1$ , ce qui donne 2.  $\square$

## Régularisation (I)

Les résultats de cette partie sont importants pour comprendre la façon dont on raisonne dans avec les "fonctions généralisées" (dérivées généralisées, distributions). Rappelons qu'en intégration on commence souvent par considérer des fonctions étagées, puis on essaie de passer à la limite en utilisant la densité de ces fonctions dans les espaces  $L^p$ . Dans le cadre des dérivées généralisées, un raisonnement standard est le suivant :

1. On vérifie la propriété demandée si tout est  $C^\infty$ .
2. On applique l'item 1. aux régularisées d'une fonction.
3. Le point crucial : on passe à la limite.

Nous donnerons ici quelques exemples. Bien d'autres se trouvent dans la section Exercices ou disséminés dans les preuves des résultats de ce chapitre. Les outils essentiels pour ce qui suit sont la Proposition 8.11, l'Exercice 9.59 et le

### 9.5 Lemme.

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .  $\partial_j f = g$ .  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ .  $\rho$  noyau régularisant.

*Conclusion.* Dans  $\Omega_\varepsilon$ , on a  $\partial_j(f * \rho_\varepsilon) = g * \rho_\varepsilon$ .

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  et soit  $K = \text{supp } \varphi$ . Soit  $\varepsilon_0$  tel que  $B(0, \varepsilon_0) + K := K_0 \Subset \Omega$ . Pour  $\varepsilon < \varepsilon_0$  on a :

$$\begin{aligned} - \int (f * \rho_\varepsilon) \partial_j \varphi &= - \int_K \left( \int_{B(x, \varepsilon)} f(y) \rho_\varepsilon(x - y) dy \right) \partial_j \varphi(x) dx \\ &= - \int_{B(0, \varepsilon)} \rho_\varepsilon(z) \left( \int_{K_0} f(y) \partial_j \varphi(y + z) dy \right) dz \\ &= \int_{B(0, \varepsilon)} \rho_\varepsilon(z) \left( \int_\Omega g(y) \varphi(y + z) dy \right) dz = \int (g * \rho_\varepsilon) \varphi. \end{aligned}$$



L'utilisation du théorème de Fubini est justifiée par la majoration

$$|f(y)\rho_\varepsilon(z)\partial_j\varphi(y+z)| \leq C|f(y)|\mathbb{1}_{K_0}(y). \quad \square$$

### 9.6 Proposition.

*Hypothèses.*  $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .  $\exists \partial_j u, \partial_j v$ .

*Conclusions.*  $\exists \partial_j(uv)$  et on a  $\partial_j(uv) = (\partial_j u)v + u\partial_j v$ .

*Démonstration.* L'égalité est claire si  $u, v \in C^1$ . En particulier, elle s'applique, dans

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}, \quad (9.3)$$

à  $u * \rho_\varepsilon$  et  $v * \rho_\varepsilon$ . D'après le Lemme 9.5, on a

$$\partial_j[(u * \rho_\varepsilon)(v * \rho_\varepsilon)] = (u * \rho_\varepsilon)((\partial_j v) * \rho_\varepsilon) + (v * \rho_\varepsilon)((\partial_j u) * \rho_\varepsilon). \quad (9.4)$$

La Proposition 8.11 donne  $u * \rho_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $L^r_{loc}$ ,  $r < \infty$ , et donc, quitte à extraire une suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , on peut supposer  $u * \rho_\varepsilon \rightarrow u$  p. p., et de même  $v * \rho_\varepsilon \rightarrow v$ ,  $u * \rho_\varepsilon \rightarrow u$ ,  $(\partial_j u) * \rho_\varepsilon \rightarrow \partial_j u$  et  $(\partial_j v) * \rho_\varepsilon \rightarrow \partial_j v$  p. p. Par ailleurs, on a  $|u * \rho_\varepsilon| \leq \|u\|_{L^\infty}$ , par l'inégalité de Young. Soit  $K \Subset \mathbb{R}^n$ . L'inégalité

$$\int_K |(u * \rho_\varepsilon)((\partial_j v) * \rho_\varepsilon) - u\partial_j v| \leq \int_K |(u * \rho_\varepsilon - u)\partial_j v| + \int_K |u * \rho_\varepsilon((\partial_j v) * \rho_\varepsilon - \partial_j v)| \quad (9.5)$$

montre que la première intégrale de (9.5) tend vers 0 le long d'une suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ .<sup>3</sup> Une inégalité similaire est vraie si on inverse les rôles de  $u$  et  $v$ . Il s'ensuit que le membre de droite de (9.4) tend vers  $u\partial_j v + (\partial_j u)v$  dans  $L^1_{loc}$ . Comme, le long de la suite  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , on a  $(u * \rho_\varepsilon)(v * \rho_\varepsilon) \rightarrow uv$  dans  $L^1_{loc}$ ,<sup>4</sup> le passage à la limite dans (9.4) combiné avec l'Exercice 9.59 donne la conclusion de la proposition.  $\square$

### 9.7 Proposition.

*Hypothèses.*  $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ .  $\Phi$  lipschitzienne.  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $\exists \partial_j u$ .

*Conclusions.*  $\exists \partial_j(\Phi(u))$  et  $\partial_j(\Phi(u)) = \Phi'(u)\partial_j u$ .

*Démonstration.* On suit le schéma précédent. Avec  $u^\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$ , on doit passer à la limite dans l'égalité

$$\partial_j(\Phi(u^\varepsilon)) = \Phi'(u^\varepsilon)[(\partial_j u) * \rho_\varepsilon]. \quad (9.6)$$

A une extraction près, on a  $(\partial_j u) * \rho_\varepsilon \rightarrow \partial_j u$  p. p. et dans  $L^1_{loc}$ , et  $\Phi'(u^\varepsilon) \rightarrow \Phi'(u)$  p. p. Par ailleurs, on a  $|\Phi'(u^\varepsilon)| \leq C$ , où  $C$  est la constante de Lipschitz de  $\Phi$ . Comme dans la preuve de (9.5), on trouve que le membre de droite de (9.6) tend vers  $\Phi'(u)\partial_j u$  dans  $L^1_{loc}$ . Par ailleurs, on a

$$\int_K |\Phi(u^\varepsilon) - \Phi(u)| \leq C \int_K |u * \rho_\varepsilon - u| \rightarrow 0,$$

grâce à la Proposition 8.11. On conclut via l'Exercice 9.59.  $\square$

3. En effet, la deuxième intégrale de (9.5) tend vers 0 par convergence dominée. La troisième est majorée par  $\|u\|_{L^\infty} \int_K |(\partial_j v) * \rho_\varepsilon - \partial_j v| \rightarrow 0$ .

4. Pour le montrer, utiliser la convergence p. p. et le fait que  $|u * \rho_\varepsilon| \leq \|u\|_{L^\infty}$ .

**9.8 Proposition.**

*Hypothèses.*  $\omega, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $\Phi : \omega \rightarrow \Omega$   $C^1$ -difféomorphisme.  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $\exists \nabla u$ .

*Conclusions.*  $\exists \nabla(u \circ \Phi)$  et  $\nabla(u \circ \Phi) = [{}^t J_\Phi][(\nabla u) \circ \Phi]$ .

Ici,  $J_\Phi$  est la matrice jacobienne de  $\Phi$ .

*Démonstration.* Soit  $u^\varepsilon = u * \rho_\varepsilon$ . Soit  $\Omega_\varepsilon$  comme dans (9.3) et soit  $\omega_\varepsilon = \Phi^{-1}(\Omega_\varepsilon)$ . Alors

$$\partial_j(u^\varepsilon \circ \Phi) = \sum_k [(\partial_k u^\varepsilon) \circ \Phi] \partial_j \Phi_k, \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (9.7)$$

et l'énoncé équivaut à montrer que (9.7) reste vraie si on remplace  $u^\varepsilon$  par  $u$ . Pour passer à la limite dans (9.7) (via l'Exercice 9.59), il suffit de combiner la Proposition 8.11 avec l'Exercice 9.55.  $\square$

Nous finissons cette section avec un *avertissement*. On ne peut pas transférer aux dérivées généralisées *toutes* les propriétés des dérivées usuelles. Considérer l'exemple suivant : soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ . Alors  $f$  a une dérivée généralisée, mais pas  $f^2$ .<sup>5</sup>

**Espaces de Sobolev**

**9.9 Définition.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On définit

$$W^{k,p} = W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}; \|u\|_{W^{k,p}} < \infty\},$$

où, si  $1 \leq p < \infty$ ,

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}^p \right)^{1/p};$$

si  $p = \infty$ ,

$$\|u\|_{W^{k,\infty}} = \|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}.$$

Ainsi,  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  si et seulement si les dérivées généralisées  $\partial^\alpha u$  existent et sont dans  $L^p(\Omega)$  pour  $|\alpha| \leq k$ . Ou encore : pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\alpha| \leq k$ , il existe  $g_\alpha \in L^p(\Omega)$  tel que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi = \int_\Omega g_\alpha \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

et on prend la norme  $\left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|g_\alpha\|_{L^p}^p \right)^{1/p}$  si  $1 \leq p < \infty$ , respectivement  $\sup_{|\alpha| \leq k} \|g_\alpha\|_{L^\infty}$  si  $p = \infty$ .

Pour  $p = 2$ , on écrit  $H^k(\Omega)$  à la place de  $W^{k,2}(\Omega)$ .

On définit

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Pour  $p = 2$ , on pose  $H_0^k(\Omega) = W_0^{k,2}(\Omega)$ .

On note, pour  $1 \leq p < \infty$  et  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ ,  $W^{-k,q}(\Omega) = [(W_0^{k,p}(\Omega))]^*$ . Pour  $p = 2$ , on note  $H^{-k}(\Omega) = [H_0^k(\Omega)]^*$ .

5. Pour la simple raison que  $f^2 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$ .

**9.10 Remarque.** Il est souvent commode de remplacer la norme de  $W^{k,p}(\Omega)$  par des normes équivalentes. Quelques exemples de normes :

1.  $u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}$ .

2.  $u \mapsto \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}$ .

3. Si  $k = 1$  : on note  $\|\nabla u\|_{L^p} = \|\nabla u\|_{L^p}$ .

Alors  $u \mapsto \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p}$ , respectivement  $u \mapsto \max\{\|u\|_{L^p}, \|\nabla u\|_{L^p}\}$ , sont des normes équivalentes à la norme usuelle sur  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**9.11 Proposition** (Exemple fondamental).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné contenant l'origine.  $u(x) = |x|^{-a}$ , avec  $a \in \mathbb{R}^*$ .

*Conclusion.*  $u \in W^{k,p}$  si et seulement si  $p(a+k) < n$ .

*Démonstration.* En utilisant l'Exercice 9.54, on trouve que  $u \in W^{k,p}$  si et seulement si les dérivées partielles ponctuelles  $\partial_p^\alpha u$  d'ordre  $\leq k$  de  $u$  sont dans  $L^p$  (et dans ce cas les dérivées ponctuelles et généralisées coïncident). En utilisant le fait que les dérivées ponctuelles de  $u$  vérifient

$$\sum_{|\alpha|=j} |\partial_p^\alpha u(x)| \sim |x|^{-a-j},$$

(Exercice 9.58) on trouve

$$u \in W^{k,p} \iff x \mapsto |x|^{-a-j} \in L^p, \forall j \leq k \iff p(a+k) < n. \quad \square$$

## L'inégalité de Poincaré

**9.12 Définition.** Un ensemble  $A$  est borné dans la direction du vecteur  $v \neq 0$  s'il existe  $M > 0$  tel que : si  $w \neq 0$  et  $w \perp v$ , alors l'ensemble  $\{t \in \mathbb{R}; w + tv \in A\}$  est contenu dans un intervalle de longueur  $M$ .

**9.13 Proposition** (Inégalité de Poincaré).

*Hypothèse.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est borné dans une direction.

*Conclusion.*  $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p}$  est une norme équivalente (à la norme usuelle) sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

Plus généralement,  $u \mapsto \sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p}$  est une norme équivalente à la norme usuelle sur

$W_0^{k,p}(\Omega)$ .

*Démonstration.* Après isométrie, on peut supposer  $\Omega$  borné dans la direction  $x_1$  (Exercice 9.56). On traite le cas où  $k = 1$ ; le cas général s'obtient par récurrence. On doit montrer l'existence de  $C_1, C_2 > 0$  telles que

$$C_1 \|u\|_{W^{1,p}} \leq \|\nabla u\|_{L^p} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega).$$

En utilisant les inégalités  $\|\partial_j u\|_{L^p} \leq \|\nabla u\|_{L^p} \leq \sum_j \|\partial_j u\|_{L^p}$ , on voit qu'il suffit d'établir l'inégalité

$$\|u\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall u \in C_c^\infty(\Omega).$$

On traite le cas où  $p < \infty$ ; le cas  $p = \infty$  est similaire. Pour tout  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ , soit  $I = [a, b] = I(x')$  de longueur  $\leq M$  tel que  $\{t \in \mathbb{R}; (t, x') \in \Omega\} \subset I$ . Si  $t \in I$ , alors l'inégalité de Hölder donne

$$|u(t, x')|^p = \left| \int_a^t \partial_1 u(s, x') ds \right|^p \leq M^{p-1} \int_a^b |\partial_1 u(s, x')|^p ds,$$

d'où

$$\|u\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{I(x')} |u(t, x')|^p dt dx' \leq M^p \|\partial_1 u\|_{L^p}^p \leq M^p \|\nabla u\|_{L^p}^p. \quad \square$$

## Régularisation (II)

Cette partie prolonge la discussion précédente sur la régularisation. Le Théorème 9.18 montre qu'afin d'établir une propriété des fonctions de  $W^{k,p}$  on peut commencer par considérer une fonction de  $W^{k,p} \cap C^\infty(\Omega)$  (et essayer de passer à la limite en utilisant la densité). De même, le Théorème 9.20 montre que, si  $\Omega$  est suffisamment régulier, alors on peut commencer par des fonctions de  $W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\bar{\Omega})$ .

### 9.14 Proposition (Approximation par régularisation).

*Hypothèses.*  $1 \leq p < \infty$ .  $k \in \mathbb{N}$ .  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ .  $\rho$  noyau régularisant.

*Conclusion.*  $u * \rho_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* Pour  $|\alpha| \leq k$ , On a  $\partial^\alpha(u * \rho_\varepsilon) = (\partial^\alpha u) * \rho_\varepsilon$  (Lemme 9.5) et  $(\partial^\alpha u) * \rho_\varepsilon \rightarrow \partial^\alpha u$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . □

Le même raisonnement, combiné avec la Proposition 8.11 donne

### 9.15 Proposition (Approximation locale par régularisation).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $\omega \sqsubset \Omega$  et  $\text{dist}(\omega, \partial\Omega) > 0$ .  $1 \leq p < \infty$ .  $k \in \mathbb{N}$ .  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ .  $\rho$  noyau régularisant.

*Conclusion.*  $u * \rho_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $W^{k,p}(\omega)$ .

De même, on a

### 9.16 Proposition.

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $1 \leq p < \infty$ .  $k \in \mathbb{N}$ .  $u \in W_c^{k,p}(\Omega)$ .  $\rho$  noyau régularisant.

*Conclusions.*  $u * \rho_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $W^{k,p}(\Omega)$  et, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,  $u * \rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\Omega)$ .

En particulier,  $W_c^{k,p}(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\Omega)$ .

### 9.17 Proposition.

*Hypothèses.*  $1 \leq p < \infty$ .  $k \in \mathbb{N}$ .

*Conclusion.*  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* Grâce à la Proposition 9.14, il suffit de pouvoir approximer une fonction  $u \in C^\infty \cap W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$  par des fonctions de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $\varphi = 1$  dans  $B(0,1)$ . Soit  $u_j(x) = u(x)\varphi(x/j)$ ,  $j \geq 1$ . Alors  $u_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  et (par application de la règle de Leibniz)

$$\|\partial^\alpha(u_j - u)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \|\partial^\beta u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus B(0,j))} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0 \quad \forall |\alpha| \leq k. \quad \square$$

### 9.18 Théorème (Théorème $H = W$ de Meyers et Serrin).

*Hypothèses.*  $1 \leq p < \infty$ .  $k \in \mathbb{N}$ .

*Conclusion.*  $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$  est dense in  $W^{k,p}(\Omega)$ .

*Démonstration.* On considère une *partition de l'unité* dans  $\Omega$  comme dans la Proposition 8.34, plus spécifiquement une suite  $(\varphi_j) \subset C_c^\infty(\Omega)$  et une suite  $(\omega_j)$  d'ouverts de  $\Omega$ , telles que :

- a) Tout  $x \in \Omega$  a un voisinage  $V$  tel que  $V$  rencontre au plus deux des  $\varphi_j$ .
- b)  $\text{supp } \varphi_j \subset \omega_j$ .
- c)  $0 \leq \varphi_j \leq 1, \forall j$ .
- d)  $\sum_j \varphi_j = 1$  dans  $\Omega$ .

Soit  $u_j = u\varphi_j \in W_c^{k,p}(\Omega)$  (Exercice 9.60). Soit  $\delta > 0$ . Soit  $\varepsilon_j$  tel que  $\|(u_j) * \rho_{\varepsilon_j} - u_j\|_{W^{k,p}} \leq 2^{-j}\delta$  et  $\text{supp } v_j \subset \omega_j$  (cf Proposition 9.16). De par la propriété a), la série  $v := \sum v_j$  est dans  $C^\infty(\Omega)$  et on a

$$\|v - u\|_{W^{k,p}(\omega)} \leq \sum \|v_j - u_j\|_{W^{k,p}(\omega)} < \delta, \quad \forall \omega \Subset \Omega.$$

En appliquant cette inégalité pour une exhaustion  $(\omega_l)$  de  $\Omega$ , on trouve  $v \in W^{k,p}(\Omega)$  et  $\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \delta$ .  $\square$

**9.19 Définition.** Un ouvert standard  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$  est l'un des domaines suivants :

1.  $\mathbb{R}^n$ .
2. un demi-espace ouvert.
3. un ouvert borné Lipschitzien.

### 9.20 Théorème.

*Hypothèses.*  $1 \leq p < \infty$ .  $k \in \mathbb{N}$ .  $\Omega$  ouvert standard.

*Conclusion.*  $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$  est dense dans  $W^{k,p}(\Omega)$ .

*Preuve dans le demi-espace.* Il suffit d'approcher une fonction  $u \in C^\infty \cap W^{k,p}(\Omega)$  par des fonctions de  $C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ . On suppose, par exemple,  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ . Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\tau_\varepsilon f(t, x') = f(t + \varepsilon, x')$ . Soit  $u_\varepsilon = \tau_\varepsilon u$ . Alors  $u_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n}) \cap W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . Par ailleurs, on a  $\partial^\alpha u_\varepsilon = \tau_\varepsilon(\partial^\alpha u)$ . En utilisant l'Exercice 8.38, on trouve  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $W^{k,p}(\mathbb{R}_+^n)$ .  $\square$

**9.21 Remarque.** On note que la preuve ci-dessus marche encore dans le "cas spécial" où  $\Omega$  est l'épigraphe d'une fonction localement lipschitzienne et où  $u$  est à support compact. Le cas d'un domaine lipschitzien borné s'obtient en considérant une partition de l'unité  $(\varphi_j)_{j \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  sur  $\overline{\Omega}$  de sorte que  $\text{supp } \varphi_0 \Subset \Omega$  et, pour  $j \geq 1$ ,  $\text{supp } \varphi_j$  soit contenu dans un voisinage convenable d'un point  $x_j \in \partial\Omega$ . Si on pose  $u_j = u\varphi_j$ , alors  $u_0 \in C_c^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ . Pour  $j \geq 1$ , après isométrie  $\Omega$  devient l'épigraphe d'une fonction localement lipschitzienne, et  $u_j$  est à support compact. On est donc ramené au cas spécial.

## Complétude, dual

**9.22 Proposition.**  $W^{k,p}(\Omega)$  est un espace de Banach.

Si  $p = 2$ ,  $H^k(\Omega)$  est un espace de Hilbert.

De même pour  $W_0^{k,p}(\Omega)$ ,  $W^{k,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $H_0^k(\Omega)$  et  $H^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .

*Démonstration.*

*Etape 1.* La norme de  $H^k(\Omega)$  provient du produit scalaire

$$(u, v) \mapsto \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} \partial^\alpha u \partial^\alpha v.$$

*Etape 2.* Soit  $(u_j)$  suite de Cauchy dans  $W^{k,p}(\Omega)$ . Ceci équivaut à  $(\partial^\alpha u_j)$  suite de Cauchy dans  $L^p(\Omega)$ ,  $\forall |\alpha| \leq k$ . Soit  $v_\alpha \in L^p(\Omega)$  telle que  $\partial^\alpha u_j \rightarrow v_\alpha$  dans  $L^p(\Omega)$ . De l'Exercice 9.59, on trouve  $\partial^\alpha v_0 = v_\alpha$ , et donc  $u_j \rightarrow v_0$ .

*Etape 3.* Les espaces  $W_0^{k,p}(\Omega)$  etc. sont des sous espaces fermés de  $W^{k,p}(\Omega)$  ou de  $H^k(\Omega)$ , donc sont des espaces de Banach ou de Hilbert.  $\square$

**9.23 Proposition.** *L'espace  $W^{k,p}(\Omega)$  est :*

1. Uniformément convexe (et donc réflexif) si  $1 < p < \infty$ .
2. Séparable si  $1 \leq p < \infty$ .
3. De même pour  $W_0^{k,p}(\Omega)$  et  $W^{k,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ .

*Démonstration.*

*Etape 1.* Soit  $p \in [1, \infty)$ . L'application

$$W^{k,p}(\Omega) \ni u \mapsto \Phi(u) = (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k}$$

est une isométrie de  $W^{k,p}(\Omega)$  vers  $X = \Phi(W^{k,p}(\Omega))$ , qui est un sous espace de  $Y = [L^p(\Omega)]^M$  (avec  $M = \#\{\alpha; |\alpha| \leq k\}$ ). Ici, on munit  $Y$  de la norme naturelle<sup>6</sup>

$$\|(f_\alpha)_{|\alpha| \leq k}\| = \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|f_\alpha\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

Si  $p \in (1, \infty)$ , alors  $Y$  est uniformément convexe.<sup>7</sup> On trouve que  $X$  est uniformément convexe. Par isomorphisme isométrique,  $W^{k,p}(\Omega)$  l'est aussi. Les espaces  $W_0^{k,p}(\Omega)$  et  $W^{k,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$  le sont aussi, comme sous espaces de  $W^{k,p}(\Omega)$ .

*Etape 2.* De ce qui précède, on peut identifier  $W^{k,p}(\Omega)$  à un sous espace de  $Y$ . Comme  $p < \infty$ ,  $Y$  est séparable, d'où  $W^{k,p}(\Omega)$  et toutes ses parties le sont aussi.  $\square$

**9.24 Théorème.**

*Hypothèse.*  $1 \leq p < \infty$ .

*Conclusions.*

1. Le dual  $W^{-1,p'}(\Omega)$  de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  est  $L^{p'}(\Omega) + \text{div } L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ , au sens suivant :

a) Si  $T \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ , alors il existe  $f \in L^{p'}$  et  $F \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  tels que  $T(\varphi) = (f + \text{div } F)(\varphi)$ ,  $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ,<sup>8</sup> c'est-à-dire

$$T(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi - \int_{\Omega} F \cdot \nabla \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \quad (9.8)$$

6. C'est pour cette norme qu'on a le théorème de Riesz "vectoriel" : le dual de  $[L^p(\Omega)]^M$  est isomorphe isométrique à  $[L^q(\Omega)]^M$ .

7. Pour s'en convaincre, il suffit d'appliquer les inégalités de Clarkson composante par composante.

8. Dans le langage des distributions, ceci revient à  $T = f + \text{div } F$ .

b) Réciproquement, si  $f \in L^{p'}$  et  $F \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ , alors

$$T(u) = \int_{\Omega} f u - \int_{\Omega} F \cdot \nabla u, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (9.9)$$

définit un élément de  $[W_0^{1,p}(\Omega)]^*$ .

2. Si on suppose, de plus,  $\Omega$  borné, alors le dual de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  peut aussi être identifié à  $\text{div } L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .
3. Si  $1 < p < \infty$ , alors on a

$$\|T\| = \inf \left\{ \left( \|f\|_{L^{p'}}^{p'} + \sum_{j=1}^n \|F_j\|_{L^{p'}}^{p'} \right)^{1/p'} ; \text{ on a (9.9)} \right\}; \quad (9.10)$$

une estimation similaire est valide dans le cadre de l'item 2.

Pour  $p = 1$ , l'égalité correspondante devient

$$\|T\| = \inf \{ \max \{ \|f\|_{L^\infty}, \|F_j\|_{L^\infty}, j = \llbracket 1, n \rrbracket \} ; \text{ on a (9.9)} \}. \quad (9.11)$$

*Démonstration.* Soient  $X$  et  $\Phi$  comme dans la preuve de la Proposition 9.23. Soit  $Z = \Phi(W_0^{1,p}(\Omega))$ . Soit  $U = T \circ \Phi^{-1}$ .

*Etape 1.* 1. b) et  $\leq$  dans (9.10) et (9.11) sont clairs.

*Etape 2.* On prouve 1. a) et  $\geq$  dans (9.10) et (9.11).

Le théorème de Hahn-Banach donne une extension  $V$  de  $U$  à  $Y$  telle que  $\|V\| = \|T\|$ . Le théorème de Riesz donne

$$T(\varphi) = V(\varphi, \partial_1 \varphi, \dots, \partial_n \varphi) = \int_{\Omega} f \varphi - \int_{\Omega} F \cdot \nabla \varphi, \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

avec  $\|T\| = \|(f, F)\|_{[L^{p'}(\Omega)]^{n+1}}$ .

*Etape 3.* On prouve 2.

Si  $\Omega$  est borné, on peut munir  $W_0^{1,p}(\Omega)$  de la norme équivalente  $u \mapsto \|\nabla u\|_{[L^p(\Omega)]^n}$  (Proposition 9.13). On procède comme ci-dessus, mais avec  $X = [L^p(\Omega)]^n$  et  $\Phi(u) = \nabla u$ .  $\square$

## Extension

Le résultats de cette partie permettent de ramener les raisonnements dans un domaine à des raisonnements sur  $\mathbb{R}^n$  tout entier.

### 9.25 Proposition.

*Hypothèses.*  $1 \leq p < \infty$ .  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .  $\tilde{u} = \begin{cases} u, & \text{dans } \Omega \\ 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$

*Conclusion.*  $\partial_j \tilde{u} = \begin{cases} \partial_j u, & \text{dans } \Omega \\ 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$

*Démonstration.* C'est clair si  $u \in C_c^\infty(\Omega)$ . Le cas général suit par passage à la limite.  $\square$

### 9.26 Théorème (Extension).

*Hypothèses.*  $1 \leq p \leq \infty$ .  $k \in \mathbb{N}^*$ .  $\Omega$  borné Lipschitzien.  $U \sqsubset \mathbb{R}^n$  tel que  $\Omega \Subset U$ .

*Conclusion.* Il existe un opérateur d'extension  $P : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W_c^{k,p}(U)$  tel que :

a)  $(Pu)|_\Omega = u, \forall u \in W^{k,p}(\Omega)$ .

b)  $P$  linéaire.

c)  $P$  continu.

Même résultat si  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$  et  $U = (-1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ .

De plus, dans les deux cas on peut choisir  $P$  indépendant de  $k$  et  $p$ .

*Preuve pour  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ ,  $U = (-1, \infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$  et  $k = 1$ .*

*Etape 1.* On construit un opérateur d'extension  $R : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Soit  $Ru(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } x_n > 0 \\ u(x', -x_n), & \text{si } x_n < 0 \end{cases}$ . On vérifie aisément que, si  $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$  et  $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , alors

$\partial_j Ru$  est l'extension par parité dans la variable  $x_n$  de  $\partial_j u$  à  $\mathbb{R}^n$ . De même,  $\partial_n Ru$  est l'extension par imparité dans la variable  $x_n$  de  $\partial_n u$  à  $\mathbb{R}^n$ . On trouve que  $R$  est (linéaire et) continu de  $W^{1,p}(\Omega)$  vers  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

*Etape 2.* On diminue le support de  $Ru$ .

Soit  $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\text{supp } \zeta \in (-1, \infty)$  et  $\zeta = 1$  dans  $[0, \infty)$ . Alors  $Pu(x', x_n) = \zeta(x_1)Ru(x', x_n)$  convient.  $\square$

**9.27 Remarque.** On peut adapter l'argument présenté dans la Remarque 9.21 pour obtenir un  $P$  lorsque  $\Omega$  est borné lipschitzien. En effet, il suffit de traiter le cas spécial où  $u$  est supportée au dessus du graphe de la fonction lipschitzienne  $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ . Dans ce cas, l'extension

$$Pu(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n), & \text{si } x_n > \psi(x') \\ u(x', 2\psi(x') - x_n), & \text{si } x_n \leq \psi(x') \end{cases}$$

envoie  $W^{1,p}(\Omega)$  sur  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Puis la multiplication par une fonction plateau convenable permet d'obtenir une extension dans  $W_c^{1,p}(U)$ . Il est bien plus difficile (et ne sera pas utilisé ici) d'obtenir une extension indépendante de  $k$  et  $p$ ; voir [19, Theorem 5, p. 181].

## Plongements

Pour les preuves des résultats de cette partie, voir [3, Section 9.3].

### 9.28 Théorème (Injections de Sobolev. Sobolev si $p > 1$ ; Gagliardo, Nirenberg si $p = 1$ ).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$  domaine standard.  $1 \leq p < n$ .

*Conclusion.* On a  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{np/(n-p)}(\Omega)$ .

**9.29 Remarque.** Traditionnellement, si  $1 \leq p < n$ , on note  $p^* = \frac{np}{n-p}$ . On a donc  $W^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$ .

### 9.30 Théorème.

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$  domaine standard.

*Conclusion.* On a  $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \forall p \leq q < \infty$ .



**9.31 Théorème** (Injections de Morrey).

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  domaine standard.  $n < p < \infty$ .

*Conclusion.* On a  $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1-n/p}(\Omega)$ .

**9.32 Théorème** (Rellich-Kondratchov).

*Hypothèses.*  $\Omega$  borné lipschitzien.

*Conclusion.* L'inclusion  $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$  est compacte.

*Variante :*

*Hypothèse.*  $\Omega$  borné.

*Conclusion.* L'inclusion  $W_0^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k-1,p}(\Omega)$  est compacte.

**9.33 Corollaire.**

*Hypothèse.*  $\Omega$  borné.

*Conclusion.* L'inclusion  $L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$  est compacte.

## Trace

**9.34 Théorème** (Trace).

*Hypothèses.*  $1 \leq p < \infty$ .  $\Omega$  ouvert standard.

*Conclusion.* L'application

$$C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega) \ni u \xrightarrow{\text{tr}} u|_{\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega)$$

admet une (unique) extension linéaire et continue  $\text{tr} : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$ .

De même, l'application

$$C^\infty(\bar{\Omega}) \cap W_{loc}^{1,1}(\Omega) \ni u \xrightarrow{\text{tr}} u|_{\partial\Omega} \in C^\infty(\partial\Omega)$$

admet une (unique) extension linéaire et continue  $\text{tr} : W_{loc}^{1,1}(\Omega) \rightarrow L_{loc}^1(\partial\Omega)$ .

**9.35 Proposition** (Intégration par parties).

*Hypothèses.*  $\Omega$  ouvert lipschitzien.  $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ .

*Conclusion.* On a

$$\int_{\Omega} u(\partial_j \varphi) = \int_{\partial\Omega} v_j(\text{tr} u) \varphi - \int_{\Omega} (\partial_j u) \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (9.12)$$

**9.36 Théorème.**

*Hypothèses.*  $\Omega$  ouvert standard.  $1 \leq p < \infty$ .

*Conclusion.* Pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .
2.  $\text{tr} u = 0$ .
3. L'application  $\tilde{u} = \begin{cases} u, & \text{dans } \Omega \\ 0, & \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$  appartient à  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**9.37 Remarque.** Par conséquent, si  $\Omega$  est standard alors  $W_0^{1,p}(\Omega) \neq W^{1,p}(\Omega)$ . Autrement dit,  $C_c^\infty(\Omega)$  n'est pas dense dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , contrairement à ce qui se passe dans  $L^p(\Omega)$  si  $p < \infty$ .

Si  $\Omega$  n'est pas suffisamment régulier, on peut avoir  $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$ . Exemple :  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $n \geq 2$ ,  $1 \leq p \leq n$  (Exercice 9.65).

**9.38 Théorème** (Gagliardo).

*Hypothèses.*  $1 < p < \infty$ .  $\Omega$  ouvert standard.

*Conclusion.* L'image de l'application  $\text{tr}$  est l'espace

$$W^{1-1/p,p}(\partial\Omega) := \left\{ f \in L^p(\partial\Omega); \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+p-2}} d\mathcal{H}^{n-1}(x) d\mathcal{H}^{n-1}(y) < \infty \right\}.$$

*Hypothèses.*  $p = 1$ .  $\Omega$  ouvert standard.

*Conclusion.* L'image de l'application  $\text{tr}$  est  $L^1(\partial\Omega)$ .

Pour  $p = 2$ , l'espace  $W^{1/2,2}(\partial\Omega)$  est noté  $H^{1/2}(\Omega)$ .

**Règle de la chaîne****9.39 Théorème** (Règle de la chaîne pour des fonctions  $C^1$ ).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $F \in C^1(\mathbb{R})$ .  $F(0) = 0$ .  $F$  lipschitzienne.  $1 \leq p \leq \infty$ .  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

*Conclusions.*  $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$  et

$$\partial_j[F(u)] = F'(u)\partial_j u, \quad j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad (\text{règle de la chaîne}). \quad (9.13)$$

(Pour cette partie, l'hypothèse  $F(0) = 0$  est inutile si  $|\Omega| < \infty$ .)

Si, de plus,  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , alors  $F(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

**9.40 Théorème** (de la Vallée Poussin).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ .  $A \subset \mathbb{R}$  borélien négligeable.

*Conclusion.*  $\nabla u = 0$  dans l'ensemble  $\{x \in \Omega; u(x) = A\}$ .

**9.41 Remarque.** Comme une conséquence de ce qui précède, si  $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$  et  $F$  est lipschitzienne, alors on peut définir le produit  $F'(u)\partial_j u$ . En effet, soit

$$A = \{t \in \mathbb{R}; F \text{ n'est pas dérivable en } t\}.$$

Alors  $A$  est borélien et (par le théorème de Rademacher Théorème 8.36) négligeable. Il s'ensuit que la fonction

$$\Omega \ni x \mapsto \begin{cases} F'(u(x))\partial_j u(x), & \text{si } u(x) \notin A \\ 0, & \text{si } u(x) \in A \end{cases}$$

est bien définie (p. p.) et ne dépend pas du choix de  $u$  dans la classe d'équivalence. Cette fonction sera désignée en bref comme  $F'(u)\partial_j u$ .

**9.42 Théorème** (Règle de la chaîne pour des fonctions lipschitziennes).

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $F$  lipschitzienne.  $F(0) = 0$ .  $1 \leq p \leq \infty$ .  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ .

*Conclusions.*  $F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$  et (9.13) est valable. (Pour cette partie, l'hypothèse  $F(0) = 0$  est inutile si  $|\Omega| < \infty$ .)

Si, de plus,  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , alors  $F(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

*Cas particulier :* si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , alors  $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$  et  $\partial_j |u| = \text{sgn } u \partial_j u$ . Si, de plus,  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , alors  $|u| \in W_0^{1,p}(\Omega)$ .

## Le cas de la dimension un de l'espace

Dans cette section, on prend  $\Omega = I \sqsubset \mathbb{R}$ , avec  $I$  intervalle ouvert.

La description des espaces de Sobolev en dimension 1 est une conséquence immédiate de la Proposition 9.4.

**9.43 Théorème.** *Si  $x_0 \in \bar{I}$ , alors on a*

$$W^{k,p}(I) = \{u \in C^{k-1}(I); u^{(j)} \in L^p(I), \forall j \leq k-1 \text{ et il existe } f \in L^p(I), C \in \mathbb{R} \text{ tels que } u^{(k-1)}(x) = C + \int_{x_0}^x f(t) dt\}.$$

**9.44 Corollaire.** *On a  $W^{k,p}(I) \hookrightarrow C^{k-1}(\bar{I})$ , avec inclusion continue.*

**9.45 Corollaire** (Théorème de différentiabilité Lebesgue).

*Hypothèse.*  $u \in W_{loc}^{1,1}(I)$ .

*Conclusions.*  $u$  est dérivable (au sens ponctuel) presque partout, et  $u'_p = u' p$ .

Le résultat suivant relie la dérivabilité à la continuité.

**9.46 Théorème** (Lebesgue).

*Hypothèse.*  $I$  borné.

*Conclusion.* On a  $u \in W^{1,1}$  ssi  $u$  est absolument continue.<sup>9</sup>

**9.47 Corollaire.** *Les fonctions lipschitziennes d'une variable sont dérivables p. p.*

Le résultat suivant caractérise l'espace  $W_0^{1,p}(I)$ .

**9.48 Théorème.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes, pour  $1 \leq p < \infty$  :*

1.  $u = 0$  on  $\partial I$ .
2.  $u \in W_0^{1,p}(I)$ .
3.  $L$ 'application  $\tilde{u} = \begin{cases} u, & \text{dans } I \\ 0, & \text{dans } \mathbb{R} \setminus I \end{cases}$  appartient à  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ .

## Le cas $p = \infty$

**9.49 Théorème.** *On a  $u \in W^{1,\infty}$  si et seulement si  $u$  est bornée et il existe  $C > 0$  tel que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y| \text{ si } [x, y] \subset \Omega. \quad (9.14)$$

*Dans le cas spécial où  $\Omega$  est convexe, ceci équivaut à  $u$  bornée et lipschitzienne. Dans ce cas,*

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \max\{\|u\|_{L^\infty}, |u|_{Lip}\}.$$

*Plus généralement, on a  $u \in W^{k,\infty}$  si et seulement si  $u \in C_b^{k-1}$  et  $D^{k-1}u \in W^{1,\infty}$ . Dans le cas particulier d'un ensemble convexe, on a*

$$\|u\|_{W^{k,\infty}} = \max\left\{ \max_{|\alpha| \leq k-1} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty}, \max_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha u|_{Lip} \right\}.$$

9. Une fonction  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$  est absolument continue si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\delta > 0$  tel que si  $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_k < y_k$  sont des points de  $I$  tels que  $\sum (y_j - x_j) < \delta$ , alors  $\sum |u(y_j) - u(x_j)| < \varepsilon$ .

Si  $\Omega$  est standard, on a

$$W^{k,\infty}(\Omega) = \{u \in C_b^{k-1}; D^{k-1}u \text{ est lipschitzienne}\},$$

et

$$\|u\|_{W^{k-1,\infty}} \sim \|u\|_{C^{k-1}} + \sum_{|\alpha|=k-1} |\partial^\alpha u|_{Lip}.$$

## Exercices

### 9.50 Exercice. \*

1. Soit  $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que  $\partial_j f$  (au sens généralisé) existe et vaut  $\partial_j f$  (au sens usuel). Plus généralement, si  $P(\partial)$  est d'ordre  $m$  et  $f \in C^m(\Omega)$ , alors  $P(\partial)f$  au sens généralisé existe et vaut  $P(\partial)f$  au sens usuel.
2. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  par morceaux.<sup>10</sup> Montrer que la dérivée usuelle de  $f$  coïncide avec la dérivée généralisée.
3. Calculer la dérivée généralisée de  $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x|$ .
4. Montrer que la fonction  $\text{sgn}$  n'a pas de dérivée généralisée dans  $\mathbb{R}$ .

**9.51 Exercice. \*** Montrer que l'égalité  $f = \partial_j g$  est équivalente à la condition (apparemment plus forte)

$$-\int_{\Omega} f \partial_j \varphi = \int_{\Omega} g \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

### 9.52 Exercice. \*

*Hypothèses.*  $f, g \in L_{loc}^1(\mathbb{R})$ .  $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy$ .

*Conclusion.*  $\square u = 0$  au sens généralisé.

[Indication : commencer par remplacer  $f$  et  $g$  par  $f * \rho_\varepsilon$  et  $g * \rho_\varepsilon$ , avec  $\rho$  noyau régularisant dans  $\mathbb{R}$ .]

### 9.53 Exercice.

*Hypothèses.*  $I \subset \mathbb{R}$  intervalle.  $a \in I$ .  $g \in L_{loc}^1(I)$ .  $C \in \mathbb{R}$ .  $f(x) := C + \int_a^x g(t) dt$ .

*Conclusions.*  $f \in L_{loc}^1(I)$ .  $g' = f$ .

### 9.54 Exercice. \*

*Hypothèses.*  $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $n \geq 2$ .  $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ .  $f \in C^1(\Omega \setminus \{x_0\})$ .  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

*Conclusion.* La dérivée généralisée  $\partial_j f$  existe si et seulement si  $\partial_j f$  (usuelle) est localement intégrable sur  $\Omega$ , et dans ce cas les deux dérivées coïncident.

Application : étudier l'existence de  $\partial_j f$  si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{|x|^a}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

### 9.55 Exercice. \*

*Hypothèses.*  $\omega, \Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $\Phi : \omega \rightarrow \Omega$   $C^1$ -difféomorphisme.  $f_j \rightarrow f$  dans  $L_{loc}^1(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $f_j \circ \Phi \rightarrow f \circ \Phi$  dans  $L_{loc}^1(\omega)$ .

10. C'est-à-dire :  $f \in C(\mathbb{R})$  et il existe une suite discrete et croissante  $(a_j)$ , éventuellement finie, telle que  $f \in C^1([a_j, a_{j+1}])$ . Si la suite  $(a_j)$  a un premier terme  $a_m$ , on ajoute la condition  $f \in C^1((-\infty, a_m])$ . De même, si  $(a_j)$  a un dernier terme  $a_m$ , on impose  $f \in C^1([a_m, +\infty))$ .

**9.56 Exercice.** \* Cet exercice est la suite de la Proposition 9.8.

Soient  $\omega, \Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $\Phi : \omega \rightarrow \Omega$  un  $C^1$ -difféomorphisme. Soit  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  ayant des dérivées généralisées du premier ordre. Soit  $\tilde{f} := f \circ \Phi$  sur  $\omega$ . Rappelons que

$$\partial_j \tilde{f} = \sum_k [(\partial_k f) \circ \Phi] \partial_j \Phi_k. \quad (9.15)$$

1. Cas particuliers.

a) Si  $A \in \mathcal{O}(n)$ , montrer que  $|\nabla(f \circ A)| = |(\nabla f) \circ A|$ .

b) Si  $\Phi$  est bi-lipschitzienne,<sup>11</sup> alors  $f \mapsto f \circ \Phi$  est un homéomorphisme de  $W^{1,p}(\Omega)$  vers  $W^{1,p}(\omega)$ .

En utilisant le théorème de Rademacher et le théorème du changement de variables (Théorèmes 8.36 et 8.21), montrer que (9.15) reste vraie sous l'hypothèse plus faible que  $\Phi$  est un homéomorphisme localement bi-lipschitzien.<sup>12</sup>

**9.57 Exercice.**

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $\Omega$  connexe.  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $f$  localement constante.<sup>13</sup>

*Conclusion.*  $f$  constante.

**9.58 Exercice.** \* Soit  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .  $f$  est  $m$ -homogène si  $f(tx) = t^m f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $\forall t > 0$ .

On suppose  $f \neq 0$ .

1. Montrer qu'il existe  $C_1, C_2 > 0$  tels que  $C_1 r^m \leq \max_{S(0,r)} |f(x)| \leq C_2 r^m$ .

2. Montrer que  $\partial^\alpha f$  est  $(m - |\alpha|)$ -homogène.

3. En calculant  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(tx) - f(x)}{t}$ , montrer l'identité d'Euler  $x \cdot \nabla f(x) = m f(x)$ ,  $\forall x \neq 0$ .

4. En déduire l'identité  $\sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \partial^\alpha f(x) = m(m-1)\dots(m-|\alpha|+1)f(x)$ ,  $\forall x \neq 0$ .

5. On suppose  $m \notin \mathbb{N}$ . De ce qui précède, déduire l'existence de  $C_{1,k}$  et  $C_{2,k}$  tels que

$$C_{1,k} r^{m-k} \leq \max_{S(0,r)} \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha f| \leq C_{2,k} r^{m-k}, \quad \forall r > 0.$$

6. Dans le cas particulier où  $f(x) = |x|^m$  (avec  $m \notin \mathbb{N}$ ), améliorer la conclusion du point précédent à

$$C_{1,k} |x|^{m-k} \leq \sum_{|\alpha|=k} |\partial^\alpha f(x)| \leq C_{2,k} |x|^{m-k}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

**9.59 Exercice.** \*

*Hypothèses.*  $f_j, f, g_j, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .  $g_j = \partial^\alpha f_j$ .  $f_j \rightarrow f$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ .  $g_j \rightarrow g$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $\partial^\alpha f = g$ .

Cas particulier : celui où  $f_j \rightarrow f$ ,  $g_j \rightarrow g$  dans  $L^p(\Omega)$ .

**9.60 Exercice** (Règle de Leibniz). \*

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .  $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ .  $\varphi \in C^k(\Omega)$ .

*Conclusions.*  $\varphi u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$  et

$$\partial^\alpha(\varphi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} \varphi \partial^\beta u, \quad \forall |\alpha| \leq k.$$

Même conclusion sous l'hypothèse plus faible  $\varphi \in W^{k,\infty}_{loc}(\Omega)$ .

11. C'est-à-dire  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont lipschitziennes.

12. C'est-à-dire  $\Phi$  et  $\Phi^{-1}$  sont localement lipschitziennes.

13. C'est-à-dire, tout  $x_0 \in \Omega$  a un voisinage ouvert  $\omega \subset \Omega$  tel que  $f = C$  dans  $\omega$ . A priori,  $C$  dépend de  $x$ .

**9.61 Exercice.** \* Soient  $u \in W^{k,p}(\Omega)$  et  $h \in \mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\tau_h u \in W^{k,p}(h+\Omega)$ , et que  $\partial^\alpha(\tau_h u) = \tau_h(\partial^\alpha u)$ ,  $\forall |\alpha| \leq k$ .

**9.62 Exercice.** \*

*Hypothèse.*  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .  $\rho$  noyau régularisant.

1. Montrer que

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p} \leq |h| \|\nabla u\|_{L^p}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

2. En déduire que  $\|u * \rho_\varepsilon - u\|_{L^p} \leq \varepsilon \|\nabla u\|_{L^p}$ .

**9.63 Exercice.** \*

*Hypothèses.*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  borné lipschitzien.  $u \in C^1(\bar{\Omega})$ .

*Conclusion.*  $\text{tr} u = u|_{\partial\Omega}$ .

Même conclusion si  $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ .

**9.64 Exercice.** \* Soient  $1 \leq p < \infty$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $u \in W^{k,p}(\Omega)$ . On suppose  $\text{supp } u \subset F \subset \Omega$ , avec  $\text{dist}(F, \partial\Omega) > 0$ . Montrer que  $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ .

[Indication : régulariser  $u$ .]

**9.65 Exercice.** \* Soient  $n \geq 2$  et  $1 \leq p \leq n$ .

1. Construire une suite  $\varphi_j \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  telle que :

a) Pour tout  $j$ ,  $\varphi_j = 1$  dans un voisinage de l'origine.

b)  $\text{supp } \varphi_j \rightarrow 0$ .

c)  $\varphi_j \rightarrow 0$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

[Essayer avec des fonctions de la forme  $\varphi_j(x) = f_j(|x|)$ . Le cas  $p = n$  est un peu plus difficile.]

2. Soient  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  et  $f \in W^{1,p}(\Omega)$ . Construire une suite  $(f_j) \subset W^{1,p}(\Omega)$  telle que :

a)  $f_j \rightarrow f$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .

b)  $f_j = 0$  au voisinage de  $\Omega$ .

3. En déduire que  $W_0^{1,p}(\Omega) = W^{1,p}(\Omega)$ .

## Solution des exercices

**Exercice 9.53.**  $g$  est continue, donc localement intégrable. Soit  $\varphi \in C_c^\infty(I)$ . Quitte à changer  $a$ , on peut supposer  $\text{supp } \varphi \subset [a, b] \Subset I$ . On a alors

$$\begin{aligned} - \int_I f(x) \varphi'(x) dx &= - \int_a^b \int_a^x g(t) \varphi'(x) dt dx = - \int_a^b g(t) \left( \int_t^b \varphi'(x) dx \right) dt \\ &= \int_a^b g(t) \varphi(t) dt = \int_I g(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

L'application du théorème de Fubini est justifiée par la majoration

$$|g(t) \varphi'(x)| \leq C |g(t)| \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \in L^1([a, b]^2).$$

**Exercice 9.57.** Soient  $x_0 \in \Omega$ ,  $R > 0$  et  $C$  tels que  $f = C$  dans  $B(x_0, R)$ . Soit

$$M = \{x \in \Omega; f = C \text{ au voisinage de } x\}.$$

Clairement,  $M$  est ouvert. Pour conclure, il suffit de montrer que  $M$  est un fermé de  $\Omega$ . Soient  $(x_j) \subset M$  et  $x \in \Omega$  tels que  $x_j \rightarrow x$ . Soit  $r > 0$  tel que  $f = D$  dans  $B(x, r)$ . Soient  $j$  tel que  $x_j \in B(x, r)$  et  $\rho$  tel que  $f = C$  dans  $B(x_j, \rho)$ . Alors  $C = D$  p. p. dans  $B(x, r) \cap B(x_j, \rho)$  qui est de mesure  $> 0$ , d'où  $C = D$ . On trouve  $x \in M$ .

## Commentaires





# Chapitre 10

## Théorie des distributions

### Définitions. Exemples

**10.1 Définition.** Une application linéaire  $u : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  est une *distribution* si et seulement si : pour tout  $K \Subset \Omega$  il existe  $C \geq 0$  et  $k \in \mathbb{N}$  tels que

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(K). \quad (10.1)$$

**10.2 Définition.** On définit, dans  $C_c^\infty(\Omega)$ , la notion suivante de convergence :  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  si et seulement si :

1. Il existe un compact  $K \Subset \Omega$  tel que  $\text{supp } \varphi_j \subset K$  pour tout  $j$ .
2.  $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi$  uniformément pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

On désigne par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace  $C_c^\infty(\Omega)$  muni de cette notion de convergence. Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on écrit tout simplement  $\mathcal{D}$ .

**10.3 Remarque.** On peut montrer (mais ceci ne sera pas utilisé par la suite) les résultats suivants :

1. La notion de convergence sur  $\mathcal{D}(\Omega)$  provient d'une topologie sur  $C_c^\infty(\Omega)$  (qui n'est pas induite par une distance).
2. Par rapport à cette topologie, les distributions sont précisément les applications linéaires et continues. Ceci justifie la notation  $\mathcal{D}'(\Omega)$  pour l'ensemble des distributions, et explique pourquoi  $\mathcal{D}'(\Omega)$  est un espace vectoriel.<sup>1</sup> Si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , on écrit tout simplement  $\mathcal{D}'$ .
3. De manière plus concrète, on peut vérifier directement, pour  $u : C_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  linéaire, l'équivalence suivante :
  - a.  $u$  est une distribution.
  - b. Si  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , alors  $u(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi)$ .

**10.4 Exemple.** Si  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ , alors  $f$  définit une distribution  $T_f$  par la formule

$$T_f(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

---

1. Ce que l'on peut vérifier directement.

**10.5 Remarque.** Le principe de localisation Proposition 8.35 montre que, si  $T_f = T_g$ , alors  $f = g$ . Ceci permet d'identifier  $f$  à  $T_f$ . Dans la suite, on va oublier la notation  $T_f$ ; la distribution  $T_f$  sera tout simplement notée  $f$ .

Ceci va entraîner des égalités du genre  $u = x^2$  (où  $u$  est une distribution); il faudra lire cette égalité comme  $u = T_{x \rightarrow x^2}$ , ou encore

$$u(\varphi) = \int x^2 \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Plus généralement, une égalité de la forme  $u = f(x)$ , avec  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , équivaut à deux propriétés :  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$  et

$$u(\varphi) = \int f(x) \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Autre abus fréquent de notation :  $u \in C^k$ , qui veut dire : il existe  $f \in C^k(\Omega)$  tel que  $u = T_f$ . Si on a déjà  $u \in L^1_{loc}$ , alors  $u \in C^k$  équivaut à : il existe  $f \in C^k(\Omega)$  telle que  $u = f$  p. p.

**10.6 Exemple.** Si  $b \in \mathbb{R}^n$ , alors la masse de Dirac au point  $b$ , définie par la formule

$$\delta_b(\varphi) = \varphi(b), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega),$$

est une distribution dans  $\Omega$ .

Dans le cas où  $b = 0$ , on écrit  $\delta$  plutôt que  $\delta_b$ ;  $\delta$  est la masse de Dirac.

**10.7 Exemple.** Soit  $\Sigma \subset \Omega$  une variété lipschitzienne  $k$ -dimensionnelle. Alors  $\varphi \mapsto \int_{\Sigma} \varphi d\mathcal{H}^k$  définit une distribution.

**10.8 Définition.** L'espace de Schwartz  $\mathcal{S}$  est l'espace des fonctions à décroissance rapide, défini comme suit :  $\varphi \in \mathcal{S}$  si et seulement si  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $p_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , où  $p_{\alpha,\beta}$  est la semi-norme

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta| |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

On munit  $\mathcal{S}$  de la topologie induite par cette famille. Concrètement,  $\mathcal{S}$  est un espace métrique, et on a  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  si et seulement si  $\partial_{\alpha,\beta}(\varphi_j - \varphi) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ .

Le dual de  $\mathcal{S}$  est l'espace des *distributions tempérées*.

**10.9 Proposition.**

1.  $\mathcal{S}$  est un espace métrique complet, et on a  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$ , avec injection dense.
2. Par conséquent, on a  $\mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$ .
3. Soit  $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  une application linéaire. Alors  $u \in \mathcal{S}'$  si et seulement si il existe  $C$  et  $k$  tels que

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\beta| \leq k}} p_{\alpha,\beta}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

**10.10 Exemple.** Soit  $p \in [1, \infty]$ . Alors  $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'$ .

**10.11 Exemple.** Une fonction  $f$  est à croissance polynomiale s'il existe  $C$  et  $k$  tels que  $|f(x)| \leq C(1 + |x|)^k$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ . Si  $f$  est à croissance polynomiale, alors  $T_f \in \mathcal{S}'$ .

**10.12 Définition.** On désigne par  $\mathcal{E}(\Omega)$  l'espace  $C^\infty(\Omega)$  muni de la famille suivante de semi-normes :

$$p_{\alpha,K}(\varphi) = \sup_{x \in K} |\partial^\alpha(\varphi)(x)|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \forall K \Subset \Omega.$$

Plus concrètement, cette topologie est induite par une distance, et on a  $\varphi_j \rightarrow \varphi$  si et seulement si  $\partial^\alpha \varphi_j \rightarrow \partial^\alpha \varphi$  uniformément sur les compacts, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

On pose aussi  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ .

Le dual de  $\mathcal{E}(\Omega)$  (respectivement  $\mathcal{E}$ ) est noté  $\mathcal{E}'(\Omega)$  (respectivement  $\mathcal{E}'$ ).

### 10.13 Proposition.

1.  $\mathcal{E}(\Omega)$  est un espace métrique complet.
2. Soit  $u : \mathcal{E}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  une application linéaire. Alors  $u$  est continue si et seulement si : il existe  $C, k$  et  $K \Subset \Omega$  tels que :

$$|u(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

3. On a les inclusions suivantes :

- a.  $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{E}(\Omega)$  et  $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{E}$  (inclusions denses).
- b.  $\mathcal{E}'(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ .
- c.  $\mathcal{E}' \hookrightarrow \mathcal{S}' \hookrightarrow \mathcal{D}'$ .

**10.14 Définition.** Soit  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Si  $\omega \sqsubset \Omega$ , alors  $u = 0$  dans  $\omega$  si et seulement si  $u(\varphi) = 0$  pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\omega)$ . On définit le support de  $u$  comme le complémentaire de  $\bigcup_{u=0 \text{ dans } \omega} \omega$ .

Le support est un fermé de  $\Omega$ .

### 10.15 Proposition.

1. Soit  $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ . Alors la restriction de  $u$  à  $\mathcal{D}(\Omega)$  définit une distribution à support compact.
2. Inversement, soit  $u$  une distribution à support compact. Alors  $u$  admet une (unique) extension linéaire et continue  $\tilde{u}$  à  $\mathcal{E}(\Omega)$ . Cette extension est définie comme suit : on fixe  $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$  telle que  $\psi = 1$  au voisinage de  $\text{supp } u$ , et on pose

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\psi\varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Ce résultat permet d'identifier  $\mathcal{E}'(\Omega)$  aux distributions à support compact.

**10.16 Exemple.** Soit  $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Alors  $T_f$ , initialement définie sur  $C_c^\infty(\Omega)$ , admet une extension linéaire et continue à  $\mathcal{E}(\Omega)$  si et seulement si il existe  $K \Subset \Omega$  tel que  $f = 0$  en dehors de  $K$ .

## Opérations avec les distributions

On désigne par  $\mathcal{X}$  l'un des espaces  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}$ , et par  $\mathcal{X}'$  son dual.

**10.17 Définition.** Si  $(u_j) \subset \mathcal{X}'$ , alors  $u_j \rightarrow u$  si et seulement si  $u_j(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$ ,  $\forall \varphi \in \mathcal{X}$ . On définit de même la convergence  $u_\varepsilon \rightarrow u$ .

On désigne cet  $u$  comme la limite des  $u_j$  (ou des  $u_\varepsilon$ );  $u$  est clairement unique.

Le résultat qui suit est l'analogue (pour des espaces qui ne sont pas des espaces de Banach) du théorème de Banach-Steinhaus.

**10.18 Proposition.**

*Hypothèses.*  $(u_j) \subset \mathcal{X}'$ .  $u_j \rightarrow u$ .

*Conclusion.*  $u \in \mathcal{X}'$ .

De même pour une famille  $(u_\varepsilon)$ .

**10.19 Exemple.** (Valeur principale de  $1/x$ ). Soit  $f_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } |x| \geq \varepsilon \\ 0, & \text{si } |x| < \varepsilon \end{cases}$ . Alors  $f_\varepsilon$  converge, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La limite est notée v. p.  $\frac{1}{x}$ , et on a v. p.  $\frac{1}{x} = \frac{1}{x}$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ .

**10.20 Exemple.** Dans  $\mathbb{R}$ , on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\varepsilon} = \text{v. p. } \frac{1}{x} - i\pi\delta$ .

Rappelons quelques définitions de base concernant les opérateurs aux dérivées partielles.

**10.21 Définition.** Un opérateur linéaire aux dérivées partielles<sup>2</sup> est décrit par une expression de la forme

$$P(x, \partial) = \sum_{\text{finie}} a_\alpha \partial^\alpha, \quad \text{avec } a_\alpha \in C^\infty(\Omega).$$

$P(x, \partial)$  agit sur  $C^\infty(\Omega)$  par la formule

$$P(x, \partial)u = \sum a_\alpha(x) \partial^\alpha u, \quad \forall u \in C^\infty(\Omega).$$

Dans le cas où les  $a_\alpha$  sont des constantes, on désigne cet opérateur  $P(\partial)$ ; c'est un opérateur linéaire aux dérivées partielles à coefficients constants.

La non égalité  $P(\partial) \neq 0$  signifie qu'au moins l'un des coefficients  $a_\alpha$  est non nul.

L'adjoint formel de  $P(x, \partial)$  est un opérateur défini par la formule

$${}^tP(x, \partial)(\varphi) = \sum_{\text{finie}} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in C^\infty(\Omega).$$

Dans le cas particulier où

**10.22 Exemple.** Si  $P(x, \partial) = x_1 x_2 \partial_2$ , alors  ${}^tP(x, \partial) = -x_1 x_2 \partial_2 - x_1$ .

**10.23 Exemple.** Si  $P(\partial)$  est à coefficients constants, alors  ${}^tP(\partial) = \sum_{\text{finie}} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha$ . En particulier, le transposé de  $\partial^\alpha$  est  $(-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha$ .

**10.24 Définition.** Soit  $P(x, \partial)$  comme ci-dessus. Si  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , alors on définit  $P(x, \partial)u = \sum_{\text{finie}} a_\alpha \partial^\alpha u$  par la formule

$$(P(x, \partial)u)(\varphi) = u({}^tP(x, \partial)\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Cas particuliers :

$$(\partial^\alpha u)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} u(\partial^\alpha \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega);$$

si  $a \in C^\infty(\Omega)$ , alors

$$(au)(\varphi) = u(a\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

2. Plus précisément, il s'agit d'un opérateur linéaire aux dérivées partielles dans  $\Omega$ , à coefficients  $C^\infty$ .

**10.25 Proposition.**

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $P(x, \partial)$  opérateur linéaire à coefficients  $C^\infty$ .  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $P(x, \partial)u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

**10.26 Exemple.**

*Hypothèses.*  $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .  $\partial^\alpha f = g$  (au sens des dérivées généralisées).

*Conclusion.*  $\partial^\alpha f = g$  au sens de  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**10.27 Exemple.** Dans  $\mathbb{R}$ , on a  $\text{sgn}' = 2\delta$ .

**10.28 Exemple.** Dans  $\mathbb{R}$ , on a  $(\ln|x|)' = \text{v. p. } \frac{1}{x}$ .

**10.29 Exemple.** Dans  $\mathbb{R}$ , on a  $x \text{ v. p. } \frac{1}{x} = 1$ .

**10.30 Exemple.** Si  $a \in C^\infty(\Omega)$  et  $b \in \Omega$ , alors  $a\delta_b = a(b)\delta_b$ .

Les résultats suivants ont déjà été montré pour les dérivées généralisées. On les retrouve dans le cadre de la théorie des distributions soit en reprenant les preuves, soit en utilisant l'Exemple 10.26.

**10.31 Proposition** (Dérivée ponctuelle=dérivée au sens des distributions).

*Hypothèses.*  $n \geq 2$ .  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $u \in C^1(\Omega \setminus \{a\})$ . Le gradient ponctuel  $\nabla u$  appartient à  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

*Conclusions.*  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ .  $\nabla u$  est le gradient de  $u$  au sens des distributions.

On écrira cette égalité  $\nabla_p u = \nabla_d u$  ("p" pour ponctuel, "d" pour distributionnel).

**10.32 Proposition.**

*Hypothèse.*  $I \sqsubset \mathbb{R}$  intervalle.

*Conclusion.*  $u \in \mathcal{D}'(I)$  vérifie  $u' = 0$  si et seulement si  $u = C$  pour un  $C \in \mathbb{R}$ .

**10.33 Proposition.**

*Hypothèses.*  $I \sqsubset \mathbb{R}$  intervalle.  $b \in I$ .  $v \in L^1_{loc}(I)$ .  $u \in \mathcal{D}'(I)$ .

*Conclusion.* On a  $u' = v$  si et seulement si il existe  $C$  tel que  $u(x) = C + \int_b^x v(t) dt$ .

La définition du produit de convolution repose sur le résultat technique suivant.

**10.34 Lemme.**

*Hypothèses.*  $\mathcal{X} = \mathcal{D}, \mathcal{E}$  ou  $\mathcal{S}$ .  $\varphi \in \mathcal{X}$ .  $u \in \mathcal{X}'$ .

*Conclusions.*

1.  $\mathbb{R}^n \ni x \xrightarrow{\eta} u(\varphi(\cdot + x)) \in \mathbb{C}$  est  $C^\infty$ .
2.  $\partial^\alpha \eta(x) = u(\partial^\alpha \varphi(\cdot + x)), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ .
3. L'application  $\varphi \mapsto \eta$  est continue de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{E}$ .

**10.35 Définition.** Si  $u \in \mathcal{X}'$ , avec  $\mathcal{X} = \mathcal{D}, \mathcal{E}$  ou  $\mathcal{S}$ , et si  $\psi \in C_c^\infty$ , alors  $u * \psi \in C^\infty$  est défini par la formule

$$(u * \psi)(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u(\varphi(\cdot + x)) dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{X}.$$

De même si  $u \in \mathcal{E}'$  et  $\psi \in C_c^\infty$ .

**10.36 Proposition.**

*Hypothèses.*  $\mathcal{X} = \mathcal{D}, \mathcal{E}$  ou  $\mathcal{S}$ .  $\varphi \in \mathcal{X}$ .  $u \in \mathcal{X}'$ .  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

*Conclusion.*  $\partial^\alpha(u * \psi) = (\partial^\alpha u) * \psi = u * \partial^\alpha \psi$ .

Plus généralement, le Lemme 10.34 permet de définir la convolution de deux distributions, à condition qu'au moins une soit à support compact.

**10.37 Définition.** Si  $u, v \in \mathcal{D}'$  et (par exemple)  $v$  est à support compact, alors  $u * v$  est la distribution définie par

$$(u * v)(\varphi) = (v * u)(\varphi) = v(x \mapsto u(\varphi(\cdot + x))), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty.$$

**10.38 Exemple.**  $u * \delta = u$ . Plus généralement,  $u * \delta_b(\varphi) = u(\varphi(\cdot - b))$ .

**10.39 Proposition.**

*Hypothèses.*  $u, v, w \in \mathcal{D}'$ .  $v$  est à support compact.

*Conclusions.*

1. On a  $(u * v)(\varphi) = u(x \mapsto v(\varphi(\cdot + x)))$ ,  $\forall \varphi \in C_c^\infty$ .
2.  $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * \partial^\alpha v$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ .
3.  $(u * v) * w = u * (v * w)$ .

## Solution fondamentale

**10.40 Définition.** Une solution fondamentale<sup>3</sup> de  $P(\partial)$  est  $E \in \mathcal{D}'$  telle que  $P(\partial)E = \delta$ .

**10.41 Exemple.** Les solutions fondamentales au sens de la définition 1.8 sont des solutions fondamentales au sens de la définition qui précède.

En particulier, nous avons trouvé des solutions fondamentales pour  $L$ ,  $\Delta$  et, si  $n = 1$ , pour  $S$  et  $\square$ .

Le résultat suivant explique l'importance de la solution fondamentale.

**10.42 Proposition.**

*Hypothèses.*  $E$  solution fondamentale de  $P(\partial)$ .  $v \in \mathcal{E}'$ .  $u := E * v$

*Conclusion.*  $u$  est solution de  $P(\partial)u = v$ .

**10.43 Théorème (Malgrange-Ehrenpreis).**

*Hypothèse.*  $P(\partial) \neq 0$ .

*Conclusion.*  $P(\partial)$  a une solution fondamentale.

**10.44 Définition.** Un opérateur  $P(\partial)$  à coefficients constants est hypoelliptique s'il a une solution fondamentale  $E$  telle que  $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

**10.45 Exemple.**  $\Delta$  et  $L$  sont hypoelliptiques.

**10.46 Théorème (Hörmander).**

*Hypothèses.* L'opérateur  $P(\partial)$  a une solution fondamentale  $E$  telle que  $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .  $f \in C^\infty(\Omega)$ .  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  vérifie  $P(\partial)u = f$ .

*Conclusion.*  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

**10.47 Corollaire (Lemme de Weyl).**

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ .  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .  $\Delta u \in C^\infty(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

**10.48 Corollaire.**

*Hypothèses.*  $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .  $Lu \in C^\infty(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

3. Ou solution élémentaire.

## Exercices

### 10.49 Exercice. \*

*Hypothèse.*  $u_j \rightarrow u$  dans  $\mathcal{X}'$ .

*Conclusion.*  $\partial^\alpha u_j \rightarrow \partial^\alpha u, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ .

### 10.50 Exercice. \*

*Hypothèses.*  $(u_j) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ .  $u_j \rightarrow u$  dans  $L^1_{loc}(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $u_j \rightarrow u$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

En particulier,  $L^p(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega), \forall p \in [1, \infty]$ .

### 10.51 Exercice. \*

*Hypothèses.*  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .  $a \in C^\infty(\Omega)$ .

*Conclusion.*  $au \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .

Plus généralement, montrer la Proposition 10.25.

### 10.52 Exercice (Règle de Leibniz). \*

*Hypothèses.*  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ .  $a \in C^\infty(\Omega)$ .  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

*Conclusion.*  $\partial^\alpha(au) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta a \partial^{\alpha-\beta} u$ .

**10.53 Exercice.** \* Soit  $u \in \mathcal{D}'(I)$ , avec  $I \sqsubset \mathbb{R}$  intervalle. Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $u' = \alpha u$  si et seulement si  $u$  est de la forme  $t \mapsto Ce^{\alpha t}$  pour un  $C \in \mathbb{R}$ .

Plus généralement, montrer que, si  $u \in \mathcal{D}'(I)$  vérifie une équation de la forme  $u^{(n)} + \sum_{j < n} c_j u^{(j)} = f \in C(I)$  (avec  $c_j \in \mathbb{C}$ ), alors  $u$  est une solution classique<sup>4</sup> de cette équation.

**10.54 Exercice.** \* Soit  $I = (0, T) \sqsubset \mathbb{R}$ . Soit  $g \in L^1(I)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer que toutes les solutions de  $u' - \lambda u = g$  dans  $\mathcal{D}'(I)$  sont données par

$$u(t) = \int_0^t e^{\lambda(s-t)} g(s) ds + Ke^{\lambda t}, \forall t \in \bar{I}.$$

---

4. C'est-à-dire :  $u \in C^n$  et  $u^{(n)}(x) + \sum_{j < n} c_j u^{(j)}(x) = f(x)$  pour tout  $x$ .





# Notations

1. EDP=équation(s) aux dérivées partielles. CI=condition(s) initiale(s). CL=condition(s) aux limites.
2. Les intervalles de  $\mathbb{R}$  sont notés à l'anglo-saxonne : l'intervalle ouvert d'extrémités  $a$  et  $b$  est noté  $(a, b)$ .
3.  $A \sqcup B$  est l'union de  $A$  et  $B$ , avec  $A$  et  $B$  disjoints.
4. [...] désigne l'ensemble des points ayant une certaine propriété. Exemples :  $[f > 0] = \{x; f(x) > 0\}$ ;  $[x_1 = 3] = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 = 3\}$ .
5. La norme dans  $\mathbb{R}^n$  est la norme euclidienne standard  $|x| = \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}$ . Les boules  $B(x, r)$  et les sphères  $S(x, r)$  sont calculées par rapport à cette norme.
6.  $\Omega$  sera toujours un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . La lettre  $n$  est réservée à la dimension de l'espace ambiant.
7. Un ouvert standard  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est l'un des domaines suivants :
  - a)  $\mathbb{R}^n$ .
  - b) un demi-espace ouvert.
  - c) un ouvert borné Lipschitzien.
8. Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , on pose  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ .
9. Si  $\Omega$  est Lipschitz,  $\nu$  ou  $\nu_x$  désigne la normale extérieure à  $\Omega$  au point  $x \in \partial\Omega$ .
10. La notation  $\omega \subset \Omega$  signifie que  $\omega$  est un ouvert contenu dans  $\Omega$ . La notation  $K \Subset \Omega$  désigne un ensemble  $K$  relativement compact dans  $\Omega$  :  $\bar{K} \subset \Omega$ .
11.  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  est la tribu borélienne sur  $\mathbb{R}^n$ .
12. La mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  est notée  $\lambda_n$ .  $\int dx$  désigne une intégrale par rapport à  $\lambda_n$ .
13. Si  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$  est borélienne sur  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , alors on utilise la notation  $\int_B f(x) dx$ , même si l'intégrale n'existe pas. Ceci est particulièrement utile pour les changements de variables (Théorème 8.21).
14. La mesure de Hausdorff  $k$ -dimensionnelle sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  est notée  $\mathcal{H}^k$ . En particulier, on a  $\mathcal{H}^n = \lambda_n$ .  
Si  $\Sigma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , alors la restriction de  $\mathcal{H}^k$  à  $\Sigma$  est notée  $\mathcal{H}^k \llcorner \Sigma$ .
15.  $\int_A f = \int_A f d\mu$  désigne la moyenne de  $f$  sur  $A$ , par rapport à la mesure  $\mu$  :

$$\int_A f d\mu = \frac{\int_A f d\mu}{\mu(A)}.$$

Dans les cas particuliers où  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (respectivement son bord), il est sous-entendu que la mesure considérée est  $\lambda_n$  (respectivement  $\mathcal{H}^{n-1}$ ).

16.  $|B|$  désigne la mesure du borélien  $B$ . La mesure sous-jacente sera  $\lambda_n$  pour les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^{n-1}$  pour leurs bords.
17.  $\mathbb{B}^n$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ .
18.  $\mathbb{S}^{n-1}$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ .
19.  $\omega_n$  est la mesure (de Lebesgue) de  $\mathbb{B}^n$ .
20.  $\sigma_n$  est la mesure (de Hausdorff  $(n-1)$ -dimensionnelle) de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .
21. Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  et si  $\varepsilon > 0$ , on définit  $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(x/\varepsilon)$ . Rappelons que, si  $f$  a une intégrale, alors  $\int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^n} f, \forall \varepsilon > 0$ .
22. L'indice  $c$  désigne "à support compact". Par exemple,  $L_c^p(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de  $L^p$  dont le support est un compact de  $\Omega$ .
23. L'indice  $b$  désigne "borné". Par exemple,  $C_b^1(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ , bornées et dont les dérivées du premier ordre sont bornées.
24. L'indice  $loc$  est synonyme de "sur les compacts". Par exemple,  $L_{loc}^1(\Omega)$  est l'espace des fonctions mesurables et intégrables sur chaque compact de  $\Omega$ .
25.  $Lip$  est pour lipschitzien. Une fonction  $u : A \rightarrow \mathbb{C}$  (avec  $A \subset \mathbb{R}^n$ ) est lipschitzienne si  $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|, \forall x, y \in A$ . La plus petite constante  $C$  vérifiant cette propriété est la semi-norme Lipschitz  $|u|_{Lip} = |u|_{Lip(A)}$  de  $u$  sur  $A$ .
26.  $C^\alpha(X)$  (avec  $X$  métrique),  $0 < \alpha \leq 1$ , désigne la classe des fonctions (numériques)  $\alpha$ -hölderiennes :  $f \in C^\alpha(X)$  si et seulement si  $\|f\|_{C^\alpha} < \infty$ , où

$$\|f\|_{C^\alpha} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)^\alpha}.$$

Pour  $\alpha = 1$ , on retrouve les fonctions lipschitziennes.

27. Le conjugué de l'exposant  $p \in [1, \infty]$  est désigné par  $q$  ou  $p'$ . Donc  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .
28. Le dual d'un espace normé  $X$  est noté  $X^*$ .
29.  $\sim$  signifie l'équivalence de deux quantités positives. Typiquement,  $f(x) \sim g(x)$  veut dire

$$C_1 f(x) \leq g(x) \leq C_2 f(x),$$

avec  $C_1, C_2 > 0$  indépendante de  $x$ .

30. Les lettres  $\alpha, \beta, \gamma$  sont réservées aux multi-indices :  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ . La longueur de  $\alpha$  est

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

On pose aussi

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!.$$

La relation d'ordre partielle sur les multi-indices est

$$\beta \leq \alpha \text{ si et seulement si } \beta_j \leq \alpha_j, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Les coefficients binomiaux généralisés sont

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!}, \forall \beta \leq \alpha.$$

31. Si  $x \in \mathbb{C}^n$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , on pose  $x^\alpha = (x_1)^{\alpha_1} \dots (x_n)^{\alpha_n}$ .
32. La notation officielle pour les dérivées partielles est  $\partial^\alpha u$ . Néanmoins, nous utiliserons plein d'autres notations. Exemples :  $u_t$  pour  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $u_{xx}$  pour  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ,  $\partial_x \partial_y u$  pour  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .
33. Quelques opérateurs aux dérivées partielles omniprésents :
- (a)  $\operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ , où  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
  - (b)  $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_n u)^t$ , où  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
  - (c)  $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \partial_1^2 u + \dots + \partial_n^2 u$ , où  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
  - (d)  $\operatorname{rot} F = (\partial_j F_i - \partial_i F_j)_{1 \leq i < j \leq n}$ , où  $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . (En anglais :  $\operatorname{curl} F$ .)
34. La flèche  $\hookrightarrow$  est réservée aux injections continues :  $X \hookrightarrow Y$  signifie que l'espace (normé ou topologique)  $X$  est inclus dans l'espace (normé ou topologique)  $Y$ , et que l'inclusion est continue. Exemple :  $L^2(0, 1) \hookrightarrow L^1(0, 1)$ .
35.  $\Gamma$  est la fonction d'Euler :  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ ,  $x > 0$ .
36.  $\tau$  désigne une translation dans l'argument :  $\tau_h f(x) = f(x - h)$ ,  $x, h \in \mathbb{R}^n$ .



# Bibliographie

- [1] Bourbaki, N.: *Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5*. Masson, Paris, new édition, 1981. *Éléments de mathématique*. [Elements of mathematics].
- [2] Brezis, H.: *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.
- [3] Brezis, H.: *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [4] Courant, R. et D. Hilbert: *Methods of mathematical physics. Vol. II : Partial differential equations*. (Vol. II by R. Courant.). Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, 1962.
- [5] Edwards, R.E.: *Functional analysis. Theory and applications*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.
- [6] Evans, L.C.: *Partial differential equations*, tome 19 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [7] Evans, L.C. et R.F. Gariépy: *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [8] Fulks, W.: *A Mean Value Theorem for the Heat Equation*. Proceedings of the American Mathematical Society, 17(1) :6–11, 1966.
- [9] Gårding, L.: *A happy collaboration*. Asian J. Math., 3(1) :xlix–liv, 1999. Sir Michael Atiyah : a great mathematician of the twentieth century.
- [10] Gilbarg, D. et N. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [11] Haberman, R.: *Elementary applied partial differential equations*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, second édition, 1987. With Fourier series and boundary value problems.
- [12] Haberman, R.: *Mathematical models*, tome 21 de *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1998. Mechanical vibrations, population dynamics, and traffic flow, An introduction to applied mathematics, Reprint of the 1977 original.
- [13] Han, Q. et F.H. Lin: *Elliptic partial differential equations*, tome 1 de *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1997.
- [14] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators. I*. Springer Study Edition. Springer-Verlag, Berlin, second édition, 1990, ISBN 3-540-52343-X. Distribution theory and Fourier analysis.
- [15] Kellogg, O. D.: *Foundations of potential theory*. Reprint from the first edition of 1929. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 31. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

- [16] Mitrea, D., M. Mitrea et M.E. Taylor: *Layer potentials, the Hodge Laplacian, and global boundary problems in nonsmooth Riemannian manifolds*. Mem. Amer. Math. Soc., 150(713) :x+120, 2001.
- [17] Rudin, W.: *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second édition, 1991.
- [18] Sogge, C.D.: *Lectures on non-linear wave equations*. International Press, Boston, MA, second édition, 2008.
- [19] Stein, E.M.: *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [20] Vladimirov, V., V. Mikhaïlov, M. Chabounine, Kh. Karimova, Y. Sidorov et A. Vacharine: *Recueil de problèmes d'équations de physique mathématique*. Éditions Mir, Moscow, 1976. Traduit du russe par Irina Pétrova.
- [21] Watson, N. A.: *A theory of subtemperatures in several variables*. Proc. London Math. Soc. (3), 26 :385–417, 1973.