Université Claude Bernard Lyon 1 — Master de mathématiques 1re année
UE Équations aux dérivées partielles — Parcours Mathématiques générales

Contrôle continu

– le 15 mars 2024, durée 60 minutes –

Exercice # 1. Soit

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ E(x) = \frac{1}{2}|x|, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que E est solution fondamentale de l'opérateur Δ donné par

$$\Delta u = u'', \forall\, u \in C^2(\mathbb{R}).$$

Exercice # 2. On considère le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u + a(t)u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0,\infty[\\ u(x,0) = f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{1}$$

de données $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ et d'inconnue $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose a continue.

1. Trouver un changement d'inconnue $v(x,t) = F(t)u(x,t)$, avec $F(t) \neq 0$, $\forall\, t \geq 0$ (F est à déterminer), de sorte que la nouvelle fonction v vérifie l'équation de la chaleur homogène $v_t - \Delta_x v = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times]0,\infty[$.
2. Trouver, du moins formellement, une solution de (1).

Exercice # 3. On se propose de retrouver le principe du maximum pour $-\Delta$ sans passer par la formule de la moyenne. La preuve s'inspire des raisonnements vus pour l'équation de la chaleur. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.

1. On suppose que $-\Delta u(x) < 0, \forall\, x \in \Omega$. Montrer que u n'a pas de point de maximum dans Ω et en déduire que
$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{2}$$
2. On suppose que $-\Delta u(x) \leq 0, \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Appliquer la question précédente à $x \mapsto u(x) + \varepsilon x_1^2$, $\varepsilon > 0$, et en déduire que (2) est encore vraie.

Exercice # 4. On travaille dans $\mathbb{R}^n$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. $\widehat{\ }$ désigne la transformée de Fourier. On se propose de montrer le résultat suivant :

$$[f \in \mathscr{L}^1, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty] \implies \lim_{\varepsilon \to \infty} \|f_\varepsilon * g\|_p = 0. \tag{3}$$

(Attention, $\varepsilon \to \infty$!) Ici,

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(x/\varepsilon), \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Rappels.

(a) (Lemme de Riemann-Lebesgue) Si $f \in \mathscr{L}^1$, alors $|\widehat{f}(\xi)| \le \|f\|_1$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, et $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

(b) Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $\varepsilon > 0$, alors $f_\varepsilon \in \mathscr{L}^1$, $\|f_\varepsilon\|_1 = \|f\|_1$, et $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

(c) (Inégalité de Young) Soit $1 \le r \le \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $g \in \mathscr{L}^r$, alors $f * g \in \mathscr{L}^r$ et $\|f * g\|_r \le \|f\|_1 \|g\|_r$.

(d) Si $f, g \in \mathscr{L}^1$, alors $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

(e) (Théorème de Plancherel) Si $g \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$, alors $\|\widehat{g}\|_2^2 = (2\pi)^n \|g\|_2^2$.

Voici la stratégie proposée pour montrer (3).

1. Montrer (3) si $p = 2$.
2. Si $2 < p < \infty$, montrer (3) en utilisant le cas $p = 2$ et l'item (c) avec $r = \infty$.
3. Si $1 < p < 2$, montrer (3) en utilisant le cas $p = 2$, l'item (c) avec $r = 1$, et l'inégalité de Hölder.