Université Claude Bernard Lyon 1 — Master de mathématiques 1re année

UE Équations aux dérivées partielles — Parcours Mathématiques générales

Contrôle continu

– le 14 mars 2025, durée 60 minutes –

Exercice # 1. Soit

$$E:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \ E(x) := \frac{1}{2}(e^x-1)\operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{2}\begin{cases} e^x-1, & \text{si } x\geq 0 \\ -(e^x-1), & \text{si } x\leq 0 \end{cases}.$$

Soit

$$P(\partial)u := u''-u',\ \ \forall\, u\in C^\infty(\mathbb{R}).$$

1. Pour une fonction $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, écrire (au moins) l'une des conditions équivalentes pour que E soit une solution fondamentale de $P(\partial)$.
2. Montrer que la fonction E ci-dessus est une solution fondamentale de $P(\partial)$.

Exercice # 2. On considère le problème

$$\begin{cases} u_t-\Delta_x u + a(t)u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n\times]0,\infty[\\ u(x,0) = f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{1}$$

de données $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ et d'inconnue $u:\mathbb{R}^n\times[0,\infty[\to\mathbb{R}$. On suppose a continue.

1. Trouver un changement d'inconnue $v(x,t) = F(t)u(x,t)$, avec $F(t)\neq 0$, $\forall\, t\geq 0$ (F est à déterminer), de sorte que la nouvelle fonction v vérifie l'équation de la chaleur homogène $v_t-\Delta_x v = 0$ dans $\mathbb{R}^n\times]0,\infty[$.
2. Trouver, du moins formellement, une solution de (1).
3. Que faut-il demander comme propriété de a pour que la fonction trouvée soit de classe C^2 ?

Exercice # 3. Soit Ω un ouvert borné et Lipschitz de $\mathbb{R}^n$. Soient $u, v\in C^2(\overline{\Omega};\mathbb{R})$, solutions de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases},$$

respectivement

$$\begin{cases} -\Delta v = g & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}.$$

En utilisant éventuellement la première formule de Green, montrer que

$$\int_\Omega fv = \int_\Omega gu.$$

Exercice # 4. On se propose de retrouver le principe du maximum pour $-\Delta$ sans passer par la formule de la moyenne. La preuve s'inspire des raisonnements vus pour l'équation de la chaleur. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\Omega;\mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega};\mathbb{R})$.

1. On suppose que $-\Delta u(x) < 0$, $\forall\, x \in \Omega$. Montrer que u n'a pas de point de maximum dans Ω et en déduire que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{2}$$

2. On suppose que $-\Delta u(x) \leq 0$, $\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Appliquer la question précédente à

$$\overline{\Omega} \ni x \mapsto u_\varepsilon(x) \coloneqq u(x) + \varepsilon x_1^2,\ \varepsilon > 0,$$

et en déduire que (2) est encore vraie.