Université Claude Bernard Lyon 1 | Master de mathématiques 1re année
UE Équations aux dérivées partielles | Parcours Mathématiques générales

Contrôle continu
– éléments de corrections –

Exercice # 1. Soit

$$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ E(x) = \frac{1}{2}|x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que E est solution fondamentale de l'opérateur Δ donné par

$$\Delta u = u'', \forall\, u \in C^2(\mathbb{R}).$$

Solution. Nous devons montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} E(-y)\varphi''(y)\,dy = \varphi(0), \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, ce qui suit de

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} E(-y)\varphi''(y)\,dy =& -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} y\varphi''(y)\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} y\varphi''(y)\,dy = -\frac{1}{2}\Big[y\varphi'(y)\Big]_{-\infty}^{0} \\ &+ \frac{1}{2}\Big[y\varphi'(y)\Big]_{0}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\varphi'(y)\,dy - \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\varphi'(y)\,dy \\ =&\frac{1}{2}\Big[\varphi(y)\Big]_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2}\Big[\varphi(y)\Big]_{0}^{\infty} = \varphi(0).\end{aligned}$$

□

Exercice # 2. On considère le problème

$$\begin{cases} u_t - \Delta_x u + a(t)u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n\times]0,\infty[\\ u(x,0) = f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{1}$$

de données $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ et d'inconnue $u : \mathbb{R}^n \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose a continue.

1. Trouver un changement d'inconnue $v(x,t) = F(t)u(x,t)$, avec $F(t) \neq 0$, $\forall\, t \geq 0$ (F est à déterminer), de sorte que la nouvelle fonction v vérifie l'équation de la chaleur homogène $Lv = v_t - \Delta_x v = 0$ dans $\mathbb{R}^n\times]0,\infty[$.
2. Trouver, du moins formellement, une solution de (1).

Solution. 1. Avec $F \in C^1$ arbitraire, nous avons, en utilisant l'équation (1),

$$Lv = F'u + Fu_t - F\Delta_x u = F'u + Fu_t - F(u_t + au) = (F' - aF)u,$$

d'où $Lv = 0$ si $F' = aF$. Une solution de cette égalité est

$$F(t) = \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right),\ \forall\, t \geq 0. \tag{2}$$

2. Avec F donné par (2), v vérifie, du moins formellement,

$$\begin{cases} Lv = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[\\ v = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}. \tag{3}$$

Une solution formelle de (3) est

$$v(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} f(y)\,dy, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t > 0 \\ f(x), & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Une solution formelle de (1) est $u = v/F$, avec F, v donnés par (2), (4). □

Exercice # 3. On se propose de retrouver le principe du maximum pour $-\Delta$ sans passer par la formule de la moyenne. La preuve s'inspire des raisonnements vus pour l'équation de la chaleur. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R}) \cap C(\overline{\Omega}; \mathbb{R})$.

1. On suppose que $-\Delta u(x) < 0, \forall\, x \in \Omega$. Montrer que u n'a pas de point de maximum dans Ω et en déduire que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{5}$$

2. On suppose que $-\Delta u(x) \leq 0, \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$. Appliquer la question précédente à $x \mapsto u(x) + \varepsilon x_1^2$, $\varepsilon > 0$, et en déduire que (5) est encore vraie.

Solution. 1. Si $x \in \Omega$ est un point de maximum local de u, alors $H_u(x) \leq 0$, et en particulier $\Delta u(x) = \operatorname{tr} H_u(x) \leq 0$. Donc un tel point n'existe pas si $-\Delta u < 0$.

$\overline{\Omega}$ est compact et u est continue sur $\overline{\Omega}$, d'où le maximum de u sur $\partial\Omega$ est atteint. De ce qui précède, les points de maximum sont dans $\overline{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$, d'où la conclusion.

2. Soit $v_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon x_1^2, \forall\, \varepsilon > 0, \forall\, x \in \overline{\Omega}$. Nous avons $-\Delta v_\varepsilon = -\Delta u - 2\varepsilon < 0$ dans Ω. De la question précédente,

$$u(x) + \varepsilon x_1^2 = v_\varepsilon(x) \leq \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{y\in\partial\Omega} y_1^2,\ \forall\, x \in \Omega. \tag{6}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$ dans (6), on obtient $u(x) \leq \max\limits_{\partial\Omega} u, \forall\, x \in \Omega$, d'où (5). $\square$

Exercice $\#$ 4. On travaille dans $\mathbb{R}^n$ avec la tribu borélienne et la mesure de Lebesgue. $\widehat{\ }$ désigne la transformée de Fourier. On se propose de montrer le résultat suivant :

$$[f \in \mathscr{L}^1, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), 1 < p < \infty] \implies \lim_{\varepsilon\to\infty} \|f_\varepsilon * g\|_p = 0. \tag{7}$$

(Attention, $\varepsilon \to \infty$!) Ici,

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f(x/\varepsilon),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Rappels.

(a) (Lemme de Riemann-Lebesgue) Si $f \in \mathscr{L}^1$, alors $|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$, et $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

(b) Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $\varepsilon > 0$, alors $f_\varepsilon \in \mathscr{L}^1$, $\|f_\varepsilon\|_1 = \|f\|_1$, et $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

(c) (Inégalité de Young) Soit $1 \leq r \leq \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $g \in \mathscr{L}^r$, alors $f * g \in \mathscr{L}^r$ et $\|f * g\|_r \leq \|f\|_1 \|g\|_r$.

(d) Si $f, g \in \mathscr{L}^1$, alors $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

(e) (Théorème de Plancherel) Si $g \in \mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$, alors $\|\widehat{g}\|_2^2 = (2\pi)^n \|g\|_2^2$.

Voici la stratégie proposée pour montrer (7).

1. Montrer (7) si $p = 2$.
2. Si $2 < p < \infty$, montrer (7) en utilisant le cas $p = 2$ et l'item (c) avec $r = \infty$.
3. Si $1 < p < 2$, montrer (7) en utilisant le cas $p = 2$, l'item (c) avec $r = 1$, et l'inégalité de Hölder.

Solution. Notons que $g \in \mathscr{L}^p, \forall\, 1 \le p \le \infty$. Soit $h^\varepsilon = f_\varepsilon * g$.

1. En utilisant successivement : (b) et (d), (b), (c) avec $r = 1$ et $r = 2$, et (e), nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\widehat{h^\varepsilon} = \widehat{f_\varepsilon * g}(\xi) = \widehat{f_\varepsilon}(\xi)\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\xi)\widehat{g}(\xi),\\
&\|h^\varepsilon\|_2^2 = (2\pi)^{-n}\|\widehat{f_\varepsilon * g}\|_2^2 = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\varepsilon\xi)|^2|\widehat{g}(\xi)|^2\, d\xi.
\end{aligned} \tag{8}$$

Par ailleurs, par convergence dominée nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\varepsilon\xi)|^2|\widehat{g}(\xi)|^2\, d\xi = 0. \tag{9}$$

(La convergence simple pour $\xi \neq 0$ suit de (a), et la domination est, en utilisant (a) et (e), $|\widehat{f}(\varepsilon\xi)|^2|\widehat{g}(\xi)|^2 \le \|f\|_1^2|\widehat{g}(\xi)|^2 \in \mathscr{L}^1$.)

L'item *1* suit de (8) et (9).

3. Soient $\theta = \dfrac{2-p}{p} \in]0,1[$, $s = \dfrac{1}{2-p} \in]1,\infty[$, $\sigma = \dfrac{1}{p-1} \in]1,\infty[$. Les exposants s et σ sont conjugués. En utilisant successivement l'inégalité de Hölder avec les exposants s et σ, (c) avec $r = 1$, (b) et l'item *1*, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |h^\varepsilon|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |h^\varepsilon|^{\theta p}|h^\varepsilon|^{(1-\theta)p} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h^\varepsilon|^{\theta p s}\right)^{1/s}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |h^\varepsilon|^{(1-\theta)p\sigma}\right)^{1/\sigma}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |h^\varepsilon|\right)^{2-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |h^\varepsilon|^2\right)^{p-1} \le \|f\|_1^{2-p}\|g\|_1^{2-p}\|h^\varepsilon\|_2^{2(p-1)}\\
&\to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0.
\end{aligned}$$

2. En raisonnant de manière analogue, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |h^\varepsilon|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |h^\varepsilon|^{p-2}|h^\varepsilon|^2 \le \|h^\varepsilon\|_\infty^{p-2}\|h^\varepsilon\|_2^2 \le \|f\|_1^{p-2}\|g\|_\infty^{p-2}\|h^\varepsilon\|_2^2\\
&\to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0. \qquad \square
\end{aligned}$$