Université Claude Bernard Lyon 1 — Master Mathématiques 1re année

UE Équations aux dérivées partielles — Parcours Mathématiques générales

Résumés des cours

– semestre de printemps 2024 –

$\boxed{\text{A}}$ **Cours du 19 janvier.** Méthodes à la Fourier

(a) Théorème 1.1.

(b) Travail individuel : exercice 1.18.

(c) Heuristique théorème 1.4.

(d) Travail individuel : calculer la transformée de Fourier inverse de

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto e^{-t|\xi|}$$

(avec $t > 0$ paramètre) en travaillant l'exercice # 12 de la feuille 10 du poly Mesure, intégration, et éléments d'analyse fonctionnelle
`http://math.univ-lyon1.fr/~mironescu/resources/cours_mesure_integration.pdf`

$\boxed{\text{B}}$ **Cours du 26 janvier.** Méthodes à la Fourier

(a) Preuve du théorème 1.4.

(b) Technique du « comportement à l'infini ».

(c) Transformée de Laplace. Heuristique de la proposition 1.6.

(d) Proposition 1.6.

(e) Intégrales de longueur, surface, ... Jacobien. Intégration sur les sphères.

(f) Travail individuel : montrer les propriétés du noyau K de la proposition 1.6.

(g) Travail individuel : exercices 1.18 et 1.17.

$\boxed{\text{C}}$ **Cours du 2 février.** Méthodes à la Fourier

(a) Exercices 1.18 et 1.17 et preuve des propriétés du noyau K de la proposition 1.6.

(b) Théorème 1.7.

(c) Travail individuel : exercice 8.42.

(d) Travail individuel : si $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, trouver une formule pour

$$\partial_r \int_{S(0,r)} f(x)\, d\mathscr{H}^{n-1}(x),\ r > 0.$$

(e) Définition 1.8.

$\boxed{\text{D}}$ **Cours du 9 février.** Méthodes à la Fourier

(a) Proposition 1.9.
(b) Ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lipschitziens et de classe C^k.
(c) Normale extérieure.
(d) Les classes $C^k(\overline{\Omega})$.
(e) Théorème de Gauss-Ostrogradskii et applications.
(f) Intégration par parties.
(g) Formules de Green.
(h) Théorème 1.11.
(i) Travail individuel : exercices 1.19, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24 et 1.25.

$\boxed{\text{E}}$ **Cours du 12 février.** Méthodes à la Fourier. Laplacien

(a) Exercices : changement de variables sur les sphères et applications, propriétés du noyau de Poisson, exercices 1.19, 1.21, 1.22, 1.23.
(b) Théorème 2.4.
(c) Travail individuel : compléter la preuve du théorème 2.4.

$\boxed{\text{F}}$ **Cours du 16 février.** Laplacien

(a) Exercice : preuve de la formule (2.5).
(b) Travail individuel : preuve du théorème 2.5.
(c) Théorème 2.6.
(d) Théorème 2.7.
(e) Travail individuel : preuve du lemme 2.8.
(f) Théorème 2.9 : principe de la preuve.
(g) Travail individuel : compléter la preuve du théorème 2.9.
(h) Proposition 2.10.
(i) Proposition 2.11.
(j) Travail individuel : preuve de la proposition 2.13.
(k) Corollaire 2.14.
(l) Travail individuel : exercice 2.22, preuve de la proposition 2.15.
(m) Théorème 2.16 (énoncé).
(n) Théorème 2.17 (énoncé).
(o) Travail individuel : preuve de la proposition 2.18.
(p) Proposition 2.19.

$\boxed{\text{G}}$ **Cours du 23 février.** Laplacien. Chaleur

(a) Preuve du lemme 2.8.

(b) Existence de la fonction auxiliaire v dans la preuve du lemme de Hopf (théorème 2.9).

(c) Travail individuel : si $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ et $A \in \mathscr{O}(n)$, montrer que $\Delta(u \circ A) = (\Delta u) \circ A$.

(d) Preuve de la proposition 2.15.

(e) Définition 3.7.

(f) Théorème 3.8.

(g) Travail individuel : compléter la preuve du théorème 3.8 (enlever l'hypothèse $u \in C^2(\Omega \times]0, T]))$.

(h) Corollaire 3.9.

(i) Théorème 3.10 (énoncé).

(j) Travail individuel : preuve du lemme 3.13.

(k) Travail individuel : étape 2 dans la preuve du théorème 3.8 par la méthode d'énergie.

(l) Théorème 3.14 (énoncé).

(m) Théorème 3.15 (énoncé).

(n) Travail individuel : preuves du lemme 3.16 et de la proposition 3.17.

(o) Proposition 3.20 (énoncé).

(p) Travail individuel : preuve de la proposition 3.21.

$\boxed{\text{H}}$ **Cours du 8 mars.** Chaleur. Ondes. Espaces de Sobolev

(a) Fin de la preuve du théorème 3.8.

(b) Exercice 2.23 1.

(c) Lemme 3.13.

(d) Proposition 4.4.

(e) Définition 9.9 (pour $k = 1$).

(f) Proposition 9.11 (pour $k = 1$).

$\boxed{\text{I}}$ **Cours du 2 avril.** Espaces de Sobolev

(a) Proposition 9.22 (avec preuve si $k = 1$).

(b) Théorème 9.24 (avec preuve si $k = 1$).

(c) Proposition 9.23 (énoncé modifié admis).

(d) Proposition 9.13 (avec preuve si $k = 1$ et Ω est borné).

(e) Propositions 9.14 et 9.17 (avec preuve si $k = 1$).
(f) Théorème 9.19 (énoncé).
(g) Théorème 9.20 si Ω est un ouvert borné Lipschitz (énoncé).
(h) Exercice à préparer : la preuve de la proposition 9.6 si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
(i) Exercice à préparer : la preuve de la proposition 9.7 si $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

$\boxed{\text{J}}$ **Cours du 5 avril.** Espaces de Sobolev

(a) Preuve de la proposition 9.7 si $u \in W^{1,p}(\Omega)$.
(b) Preuve de la proposition 9.6 si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.
(c) Opérateurs compacts.
(d) Théorème de Rellich-Kondratchov 9.32. Début de la preuve.

$\boxed{\text{K}}$ **Cours du 12 avril.** Espaces de Sobolev. Méthodes fonctionnelles pour Δ

(a) Théorème de Rellich-Kondratchov 9.32. Début de la preuve.
(b) Proposition 6.1.
(c) Travail individuel : Proposition 6.2.
(d) Proposition 6.3.
(e) Théorème 6.4.

$\boxed{\text{L}}$ **Cours du 19 avril.** Espaces de Sobolev. Méthodes fonctionnelles pour L

(a) Théorème 6.8. Existence.

$\boxed{\text{M}}$ **Cours du 29 avril.** Espaces de Sobolev. Méthodes fonctionnelles pour L et $\square$

(a) Théorème 6.8. Unicité.
(b) Exercice 6.11 item 1 (variante espaces de Hilbert séparables).
(c) Heuristique de l'énoncé du théorème 6.9.

$\boxed{\text{N}}$ **Cours du 17 mai.** Méthodes des caractéristiques

(a) Heuristique : obtention du système caractéristique.
(b) Analyse du problème : Evans, section 3.2, Theorem 1.
(c) Exemple travaillé : résolution de l'équation eikonale $|\nabla u| = 1$ avec la condition initiale $u(y, 0) = 0$.
(d) Synthèse : existence d'une solution si $F \in C^3$ avec condition initiale non-caractéristique $g \in C^3$: Evans, section 3.2, Theorem 2.
(e) Travail individuel : prouver la formule (43), p. 107.
(f) Travail individuel : Evans, section 3.2, Example 2, p. 101–102.