Contrôle terminal
le 12 décembre 2022 – durée 180 minutes

Exercice # 1. Soient $N \geq 2$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $C^{2,1}$. On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x) + u^p & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} . \tag{1}$$

On suppose

(i) $a = a(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ pour un $\alpha \in (0,1)$.

(ii) $a \geq 0$.

(iii) $0 < p < 1$.

Montrer que (1) a exactement une solution classique $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Exercice # 2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 < p < \infty$ et $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. On suppose :
   (a) $\Phi(0) = 0$.
   (b) $\Phi \in C^1$.
   (c) Φ' bornée.

   Si $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R})$, montrer que $\Phi(u) \in W^{1,p}(\Omega)$.

2. De même sous les hypothèses
   (a) $\Phi(0) = 0$.
   (b) Φ Lipschitzienne.

Exercice # 3.

$\boxed{\text{A}}$ Soient $N \geq 2$, Ω la boule (euclidienne) unité de $\mathbb{R}^N$ et p tel que

(i) $1 < p < \dfrac{N+2}{N-2}$ si $N \geq 3$.

(ii) $1 < p < \infty$ si $N = 2$.

On considère le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u > 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} . \tag{2}$$

On se propose d'obtenir l'*estimation a priori* suivante : il existe une constante finie $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_\infty \leq C, \; \forall\, u \in C^2(\overline{\Omega}) \text{ solution de (2).} \tag{3}$$

Voici une stratégie possible (à justifier en cas de mise en œuvre). Dans ce qui suit, C_j désigne une constante dépendant uniquement de p et N.

1. Écrire u sous la forme $u(x) = f(|x|)$, et réduire le problème à $f(0) \leq C$.
2. En multipliant (2) par une première fonction propre $\varphi_1 > 0$ de $-\Delta$ dans $H_0^1(\Omega)$, obtenir les estimations a priori $\displaystyle\int_\Omega u^p\,\varphi_1 \leq C_1$, $f(1/2) \leq C_2$. (On pourra établir et utiliser une inégalité de la forme $t^p \geq \varepsilon t - C(\varepsilon)$, $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, \varepsilon > 0$.)
3. En écrivant le Laplacien en coordonnées sphériques et en utilisant (2), expliciter la dérivée de la fonction
$$g : [0,1] \to \mathbb{R},\; g(r) := r^{N-1} f'(r),$$
et en déduire la monotonie de g.
4. En déduire l'estimation a priori $|f'(1/2)| \leq C_3$.
5. À partir des questions précédentes et de la formule de g', obtenir l'estimation a priori $|f'(1)| \leq C_4$.
6. Multiplier (2) par u et combiner le résultat obtenu avec l'identité de Pohozaev et avec la question précédente pour obtenir l'estimation a priori $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \leq C_5$.
7. Conclure via la théorie de la régularité elliptique.

$\boxed{\text{B}}$ Cette fois-ci, nous supposons $0 < p < 1$.

1. Avec les notations ci-dessus, montrer que
$$f'(r) = -\frac{1}{r^{N-1}} \int_0^r t^{N-1}\, f^p(t)\, dt,\; \forall\, 0 < r < 1, \tag{4}$$
et en déduire l'estimation a priori
$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{(2N)^{1/(1-p)}}. \tag{5}$$
2. Que donne cette démarche si $1 < p < \infty$?