UCBL 2015/2016 – UE Fonctions d'une variable complexe

– exercices d'entraînement pour le contrôle final –

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$f(x+\imath y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+\imath y)}{x^2+y^2}, & \text{si } x+\imath y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+\imath y = 0. \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas différentiable en 0, mais possède des dérivées partielles qui satisfont les équations de Cauchy-Riemann en 0.

Exercice 2 (Racines p-ièmes)**.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et p un entier, $p \geq 2$. On appelle détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U toute fonction holomorphe $f \colon U \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in U$ on ait $(f(z))^p = z$.

a) Montrer que s'il existe une détermination holomorphe du logarithme sur U, alors il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U.

b) Soit f une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer que pour tout $z \in U$ on a $f(z) \neq 0$. En déduire que $0 \notin U$.

c) On suppose U connexe et on note f_1, f_2 deux déterminations holomorphes de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $f_1 = \lambda f_2$.

d) En déduire que s'il existe une détermination holomorphe de $z \mapsto z^{1/p}$ sur U, alors il en existe exactement p distinctes. Quelles sont-elles ?

e) Montrer qu'il existe une unique détermination holomorphe f de $z \mapsto z^{1/3}$ sur $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ telle que$f(1) = e^{4\imath\pi/3}$. Calculer $f(\imath)$ et déterminer $f(U)$.

Exercice 3. En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathfrak{Ree}(z) \geq 0$ on a :

$$\left| e^{bz} - e^{az} \right| \leq (b-a)|z|e^{b\mathfrak{Ree}(z)}.$$

Exercice 4. Soit γ un lacet continu contenu dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$. Montrer que γ est homotope (relatif à U) à une ligne polygônale fermée.

Exercice 5. Soit $f : U \to V$ holomorphe et bijective, avec $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(V)$ de V (c'est-à-dire la mesure de Lebesgue bidimensionnelle de V) est donnée par

$$\mathcal{A}(V) = \int_U |f'(x+\imath y)|^2 \, dxdy.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{D}(0,R) \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

1. Montrer qu'il existe des nombres complexes a_n, $n \in \mathbb{N}$, tels que

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n, \forall\, z \in \mathbb{D}(0,R).$$

2. Déterminer, en fonction des a_n, toutes les primitives de f.

Exercice 7. Soit $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) := \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z-1}$, avec $U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, 0, |z| < 1\}$. Montrer que f n'admet pas de primitive dans U.

Exercice 8. Soit $F \subset \mathbb{C}$ un fermé connexe contenant les points 0 et 1. Soit $U := \mathbb{C} \setminus F$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) := \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z-1}$. Montrer que f a une primitive dans U.

Exercice 9. Soient $0 < R_1 < R_2 < \infty$ et $U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, R_1 < |z| < R_2\}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe, de développement en série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \ \forall\, z \in U.$$

Montrer que f a une primitive si et seulement si $a_{-1} = 0$.
[Indication : quelle est la formule de a_{-1} ?]

Exercice 10. Soit $f(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière convergente dans le disque $U := \mathbb{D}(0, R)$ (avec $R \in]0, \infty]$) et telle que

$$|f'(z)| \leq M, \ \forall\, z \in U.$$

Montrer que

$$|a_n| \leq \frac{M}{nR^{n-1}}, \ \forall\, n \geq 1.$$

Exercice 11. Soit $f(z) := \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une fonction entière telle que

$$|f'(z)| \leq M e^{|z|}, \ \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Montrer que

$$|a_n| \leq M \left(\frac{e}{n}\right)^n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 12. Soient $0 < R_1 < R_2 < \infty$ et $U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, R_1 < |z| < R_2\}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe.
Soit $z \in \mathbb{D}(0, R_1)$. Montrer que l'intégrale

$$\int_{\mathscr{C}(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

ne dépend pas de $r \in]R_1, R_2[$.

Exercice 13. Soit $\varphi : \mathscr{C}(0, 1) \to \mathbb{C}$ continue. Montrer l'équivalence suivante :

$$\left[\int_{\mathscr{C}(0,1)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0, \ \forall\, z \in \mathbb{D}(0,1)\right] \iff \left[\int_{\mathscr{C}(0,1)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^n}\, d\zeta = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*\right].$$

Exercice 14. Soit $p \geq 2$ un entier.

1. Calculer le développement en série entière au voisinage de 0 de $f(z) := \dfrac{1}{1 - z^p}$.
2. En déduire celui de $g(z) := \dfrac{1}{1 + z + \cdots + z^{p-1}}$.
3. Trouver les rayon de convergence des séries ainsi trouvées.

Exercice 15. 1. Montrer qu'il existe une et une seule fonction holomorphe $f : \mathbb{D}(0, 1) \to \mathbb{C}$ telle que

$$f^2(z) = 1 + z, \ \forall\, z \in \mathbb{D}(0, 1), \quad \text{et } f(0) = 1.$$

2. Montrer que

$$f(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!} z^n, \ \forall z \in \mathbb{D}(0,1).$$

Exercice 16. 1. Montrer qu'il existe une et une seule fonction holomorphe $f : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ telle que

$$f^2(z) = \frac{1}{1-z^2}, \ \forall z \in \mathbb{D}(0,1), \quad \text{et } f(0) = 1.$$

2. Montrer que la fonction sin est injective sur $\mathbb{D}(0,1)$.

   Notons $g(z)$ la réciproque de sin sur ce domaine, et posons $h := \frac{g}{f}$.

3. Montrer que

$$(1-z^2)h'(z) - zh(z) = 1, \ \forall z \in \mathbb{D}(0,1), \quad \text{et } h(0) = 0.$$

4. En déduire que

$$h(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} z^{2n+1}, \ \forall z \in \mathbb{D}(0,1).$$

Exercice 17. Montrer que la formule

$$f(z) := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(nz)}{n!}$$

définit une fonction entière.

Exercice 18. Soit $U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathfrak{Re} z > 0\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la formule

$$f_n(z) := \int_{1/n}^{n} t^{z-1} e^{-t}\, dt, \ \forall z \in U,$$

   définit une fonction holomorphe.

2. Montrer que la formule

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt, \ \forall z \in U,$$

   définit une fonction holomorphe.

Exercice 19. Soit $U := \mathbb{D}(0,R)$. Soit $z_0 \in U$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que

$$|f(z)| \leq M, \ \forall z \in U, \quad \text{et } f(z_0) = 0.$$

Montrer que

$$|f(z) \leq M \frac{R|z-z_0|}{|R^2 - z\overline{z_0}|}, \ \forall z \in U \quad \text{et } |f'(z_0)| \leq M \frac{R}{R^2 - |z_0|^2}.$$

[Indication : se ramener d'abord au cas $R = 1$. Puis au cas $z_0 = 0$, en utilisant une transformation de Moebius.]

Exercice 20. Soit $U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, \mathfrak{Re} z > 0\}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe s'annulant en les points distincts $z_1, \ldots, z_m \in U$. Montrer que

$$|f(z) \leq \frac{|z-z_1|}{|z+\overline{z_1}|} \cdot \frac{|z-z_2|}{|z+\overline{z_2}|} \cdots \frac{|z-z_m|}{|z+\overline{z_m}|}, \ \forall z \in U.$$

Exercice 21. Soit $U := C \setminus (D_0 \cup D_1)$, avec
$$D_x := \{x + \imath t\,;\, t \in [0, \infty[\},\ x = 0, 1.$$

1. Montrer que U est simplement connexe.
2. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : U \to \mathbb{C}$ telle que
$$e^{f^3(z)} = z,\ \forall\, z \in U.$$

Exercice 22. Pour chacun des ouverts U ci-dessous, ∂U est orienté dans le sens direct. On précisera ce sens, et on calculera les intégrales suivantes par rapport à ce sens.
$$\int_{\partial U} \frac{1}{1+z^4}\, dz,\ U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-1| < 1\}\,;$$
$$\int_{\partial U} \frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}\, dz,\ U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-1-\imath| < 2\}\,;$$
$$\int_{\partial U} \frac{z}{z+3} e^{z/3}\, dz,\ U := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| > 4\}.$$

Exercice 23. Montrer l'égalité
$$\frac{1}{2\imath\pi} \int_{\mathscr{C}(0,1)} e^{\zeta(z+1/z)/2}\, dz = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n+1} \frac{1}{n!(n+1)!},\ \forall\, \zeta \in \mathbb{C}.$$

Exercice 24. Calculer
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath t}}{(t-\imath)^2}\, dt.$$

Exercice 25. Soient $0 < R_1 < R_2$, $U := \mathbb{D}(0, R_2)$ et $\omega := \mathbb{D}(0, R_1)$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe s'annulant uniquement en 0. Soit k la multiplicité de 0 en tant que zéro de f.

Posons $m := \min\limits_{|z|=R_1} |f(z)|$. Montrer que, si $|\zeta| < m$, alors l'équation $f(z) = \zeta$ a exactement k solutions (multiplicités comprises) dans ω.

Exercice 26. Soient $0 < R_1 < R_2$, $U := \mathbb{D}(0, R_2)$ et $\omega := \mathbb{D}(0, R_1)$. Soit $f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe ayant en 0 un pôle d'ordre k.

Posons $M := \max\limits_{|z|=R_1} |f(z)|$. Montrer que, si $|\zeta| > M$, alors l'équation $f(z) = \zeta$ a exactement k solutions (multiplicités comprises) dans ω.

[Indication. Montrer d'abord que le nombre de solutions ne dépend pas de a. Calculer ensuite ce nombre quand $|a|$ est suffisamment grand, en utilisant l'exercice précédent.]

Exercice 27. Trouver les nombre de solutions des problèmes suivants :
$$z^4 - 3z + 1 = 0,\ |z| < 1\,;$$
$$z^3 - 12z + 2 = 0,\ |z| < 2.$$

Exercice 28. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un domaine non vide et simplement connexe tel que $U \neq \mathbb{C}$. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus U$.

1. Montrer qu'il existe $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe telle que
$$g^2(z) = z - z_0,\ \forall\, z_0 \in U.$$
2. Montre que
$$g(z) + g(\zeta) \neq 0,\ \forall\, z, w \in U.$$
3. En déduire que pour tout $z_1 \in U$ il existe un $r > 0$ (dépendant de z_1) tel que
$$|g(z) + g(z_1)| > r,\ \forall\, z \in U.$$
4. En déduire qu'il existe une fonction holomorphe et injective $h : U \to \mathbb{D}$.