Chapitre 1

Méthodes à la Fourier

Equation de la chaleur dans le demi-espace

On considère le problème

$$\begin{cases} Lu = u_t - \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = f(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}. \tag{1.1}$$

En appliquant (formellement) la transformée de Fourier dans la variable x, on obtient (via le Théorème 8.28 *4.*) que la fonction $v(\xi,t) = \mathscr{F}_x u(\cdot,t)(\xi)$ vérifie

$$\begin{cases} v_t + |\xi|^2 v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ v(\xi,0) = \mathscr{F} f(\xi) & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}, \tag{1.2}$$

ce qui donne $v(\xi,t) = e^{-t|\xi|^2}\mathscr{F} f(\xi)$ et suggère (en utilisant le Théorème 8.28 *5.*, le Corollaire 8.29 et la Proposition 8.30) la solution

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(y) K(x,y,t)\, dy, & \text{si } t > 0 \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}, \text{ où } K(x,y,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x-y|^2/(4t)}; \tag{1.3}$$

K est le *noyau de la chaleur*.

1.1 Théorème.
Hypothèses. $1 \le p \le \infty$. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *u est donnée par* (1.3).
Conclusions.

1. *u vérifie $Lu = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$.*
2. *Si $p < \infty$, alors $\lim\limits_{t \searrow 0} u(\cdot,t) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Même conclusion si $p = \infty$, et de plus f bornée et uniformément continue.*
4. *Si $f \in C_b$, alors $\lim\limits_{t \searrow 0} u(\cdot,t) = f$ uniformément sur les compacts.*

Démonstration.
Étape 1. $u \in C^\infty$ et $Lu = 0$. Soient $M \Subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. En utilisant l'Exercice 1.13, on a

$$|\partial^\alpha_{(x,t)}[K(x,y,t)f(y)]| \le C_\alpha e^{-a|y|^2}|f(y)|, \quad (x,t) \in M,\ y \in \mathbb{R}^n. \tag{1.4}$$

Le membre de droite de (1.4) est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$, car $f \in L^p$ et les gaussiennes sont dans L^q pour tout q ; on conclut en prenant $q = p'$ et en utilisant l'inégalité de Hölder (Proposition 8.1).

On obtient que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*)$ et

$$\partial^\alpha u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} [\partial^\alpha_{(x,t)} K(x,y,t)] f(y)\, dy.$$

En particulier,

$$Lu(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} [L_{(x,t)} K(x,y,t)] f(y)\, dy = 0,$$

grâce à l'Exercice 1.12.

Étape 2. Comportement de $u(\cdot,t)$ pour $t \searrow 0$. Soit $\rho(x) = (4\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/4}$, de sorte que

$$u(x,t) = \rho_{\sqrt{t}} * f(x),\, x \in \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$

En notant que $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\rho \geq 0$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$, on conclut grâce au Théorème 8.5. □

Equation des ondes 1D

On applique la même démarche au problème

$$\begin{cases} \square u = u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R} \\ u_{t|t=0} = g & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}. \tag{1.5}$$

On trouve

$$\begin{cases} v_{tt} + \xi^2 v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \\ v(\xi,0) = \mathscr{F} f(\xi) & \text{dans } \mathbb{R} \\ v_t(\xi,0) = \mathscr{F} g(\xi) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases},$$

d'où

$$v(\xi,t) = \cos(\xi t)\mathscr{F} f(\xi) + \frac{\sin(\xi t)}{\xi}\mathscr{F} g(\xi) = \frac{e^{\imath\xi t} + e^{-\imath\xi t}}{2}\mathscr{F} f(\xi) + \frac{\sin(\xi t)}{\xi}\mathscr{F} g(\xi).$$

En utilisant l'Exercice 8.45, on devine la solution

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\, dy. \tag{1.6}$$

Un calcul direct confirme cette intuition.

1.2 Proposition.
Hypothèses. $f \in C^2(\mathbb{R})$. $g \in C^1(\mathbb{R})$. *u est donnée par* (1.6).
Conclusions.

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
1. *u vérifie* (1.5).

1.3 Remarque. On voit déjà deux différences de taille entre les deux équations. D'une part, l'équation de la chaleur a un effet régularisant : u devient C^∞, même si la donnée initiale ne l'est pas. Ce n'est pas le cas de l'équation des ondes. D'autre part, le temps est réversible dans l'équation des ondes : on peut prédire le passé à partir du présent. On peut montrer que tel n'est pas le cas pour l'équation de la chaleur.

Equation de Laplace dans le demi-espace

Commençons par le cas du demi-plan :

$$\begin{cases} \Delta u = u_{tt} + u_{xx} = 0 & \text{dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases}.$$

Comme ci-dessus, on trouve $v(\xi,t) = C(\xi)e^{-\xi t} + D(\xi)e^{\xi t}$. Intuitivement, v doit être petite (c'est une transformée de Fourier, qui est bornée), d'où $v(\xi,t) = E(\xi)e^{-|\xi|t}$. On trouve $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} P(x-y,t)f(y)\,dy$, où $\mathscr{F}_x P(\cdot,t)(\xi) = e^{-|\xi|t}$. La formule d'inversion de Fourier (Théorème 8.28 *6.*) suggère

$$P(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{\imath x\xi}e^{-|\xi|t}\,d\xi = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}.$$

Passons au demi-espace :

$$\begin{cases} \Delta u = u_{tt} + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u_{|t=0} = f & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}. \tag{1.7}$$

La démarche ci-dessus mène à

$$P(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}e^{-|\xi|t}\,d\xi = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}; \tag{1.8}$$

voir l'Exercice 8.47. P est le *noyau de Poisson*, et on a deviné la solution

$$u(x,t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} P(x-y,t)f(y)\,dy, & \text{si } t>0 \\ f(x), & \text{si } t=0 \end{cases}. \tag{1.9}$$

1.4 Théorème.
Hypothèses. $1 \le p \le \infty$. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *u est donnée par* (1.9).
Conclusions.

1. *u vérifie $\Delta u = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$.*
2. *Si $p<\infty$, alors $\lim_{t\searrow 0} u(\cdot,t) = f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.*
3. *Même conclusion si $p=\infty$, et de plus f bornée et uniformément continue.*
4. *Si $f \in C_b$, alors $\lim_{t\searrow 0} u(\cdot,t) = f$ uniformément sur les compacts.*

Démonstration. On raisonne comme dans la preuve du Théorème 1.1, avec

$$\rho(x) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}}\frac{1}{(1^2+|x|^2)^{(n+1)/2}},$$

de sorte que $u(\cdot,t) = \rho_t * f$. Le fait que $\int_{\mathbb{R}^n}\rho = 1$ suit de l'Exercice 8.46. □

Equation de Schrödinger

On considère le problème

$$\begin{cases} \imath u_t + \Delta_x u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u_{|t=0} = f \end{cases}. \tag{1.10}$$

On peut adapter la stratégie suivie pour l'équation de la chaleur, mais ceci demande de généraliser la transformée de Fourier au-delà de L^1. Ce sera fait plus tard, mais pour l'instant nous allons plutôt adapter une stratégie ad hoc. On commence par regarder le problème approché

$$\begin{cases} u^\varepsilon_t - (\imath+\varepsilon)\Delta_x u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon_{|t=0} = f \end{cases}.$$

En utilisant la Proposition 8.30, on trouve, pour $t > 0$, la solution

$$u^\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\rho^\varepsilon)_{\sqrt{t}}(x-y) f(y)\,dy, \text{ où } \mathscr{F}\rho^\varepsilon(\xi) = e^{-(\imath+\varepsilon)|\xi|^2},\ \rho^\varepsilon(x) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi(\imath+\varepsilon)})^n} e^{-|x|^2/(4(\imath+\varepsilon))}. \tag{1.11}$$

Un passage formel à la limite dans (1.11), accompagné d'une démarche similaire si $t < 0$ suggère la solution

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\sqrt{4\imath\pi t})^n} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath|x-y|^2/(4t)} f(y)\,dy, & \text{si } t \neq 0 \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}. \tag{1.12}$$

Le résultat qui suit n'est pas optimal ; il sera amélioré par la suite.

1.5 Proposition.
Hypothèses. $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$*, ou, plus généralement,* $f \in L^2_c(\mathbb{R}^n)$*.* u *est donnée par* (1.12)*.*
Conclusions.

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*)$ *et* $\imath u_t + \Delta_x u = 0$ *dans* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$.
1. $\lim_{t\to 0} u(\cdot,t) = f$ *dans* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. La première partie, par exemple pour $t > 0$, suit en différentiant la formule de u, et en utilisant le fait que $\imath P_t + \Delta_x P = 0$, où $P(x,t) := \dfrac{1}{(\sqrt{4\imath\pi t})^n} e^{\imath|x|^2/(4t)}$.

Pour la seconde partie, on note que pour $t \neq 0$ fixé, $\mathscr{F}_x(u^\varepsilon(\cdot,t)) \to g$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, où $g(\xi) = e^{-\imath t|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$. Le théorème de Plancherel 8.31 implique que $u^\varepsilon(\cdot,t) \to v$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, où $\hat{v} = g$. Comme, par ailleurs, on a $u^\varepsilon \to u$ en tout point, on trouve $u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{F}_x u(\cdot,t) = g$. En appliquant à nouveau le théorème de Plancherel, on obtient *2*. □

Résolvante du laplacien

On s'intéresse ici au problème

$$\lambda w - \Delta w = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^n, \ \text{ où } \lambda > 0. \tag{1.13}$$

On peut ramener ce problème à l'équation de la chaleur en utilisant la transformée de Laplace. Plus spécifiquement, si u est solution de (1.1), alors un calcul formel montre que $w(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(x,t)\,dt$ vérifie (1.13). [1] On devine

$$w(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/(4t)} f(y)\,dy\,dt = K * f(x), \tag{1.14}$$

où

$$K(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}\,dt. \tag{1.15}$$

Le résultat suivant sera généralisé dans le cadre de la théorie des distributions.

1.6 Proposition.
Hypothèses. $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. *$w$ est donnée par* (1.14).
Conclusion. *w vérifie* (1.13).

Démonstration. Par calcul direct, on a $K \in L^1$ et $\hat{K}(\xi) = \dfrac{1}{\lambda + |\xi|^2}$. On trouve $w \in C^\infty$ et $\lambda w - \Delta w = K * (\lambda f - \Delta f) \in L^1$, d'où

$$\mathscr{F}(\lambda w - \Delta w) = \hat{K} \mathscr{F}(\lambda f - \Delta f) = \hat{K}(\lambda + |\xi|^2)\hat{f} = \hat{f},$$

d'où $\lambda w - \Delta w = f$, par injectivité de la transformée de Fourier (Corollaire 8.29). □

Equation de Laplace dans une boule

La formule qui suit est une application indirecte de la transformée de Fourier. On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } B(x_0, R) \\ u = f & \text{sur } S(x_0, R) \end{cases}. \tag{1.16}$$

Explication de l'origine de la formule (1.17) qui suit. On peut ramener la boule sur un demi-espace par une inversion Π. Une inversion est une *transformation conforme*, c'est-à-dire si u vérifie $\Delta u = 0$, il en va de même pour $v = u \circ \Pi^{-1}$. Ainsi, on ramène l'équation de Laplace dans une boule à la même équation dans un demi-espace, avec $f \circ \Pi^{-1}$ comme donnée ; l'opération au bord revient à une projection stéréographique. En utilisant (1.8) pour trouver v et en inversant la projection stéréographique, on trouve

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - |x - x_0|^2}{\sigma_n R} \displaystyle\int_{S(x_0,R)} \frac{f(y)}{|x-y|^n}\, d\mathscr{H}^{n-1}(y), & \text{si } x \in B(x_0, R) \\ f(x), & \text{si } x \in S(x_0, R) \end{cases}. \tag{1.17}$$

1.7 Théorème (Formule de Poisson)**.**
Hypothèses. $f \in C(S(x_0,R))$. *u est donnée par* (1.17).
Conclusions.

1. $u \in C^\infty(B(x_0,R)) \cap C(\overline{B}(x_0,R))$.
2. *u est solution de* (1.16).

1. w est la transformée de Laplace (en λ) de u.

Démonstration. On peut supposer $x_0 = 0$. Soit v le membre de droite de (1.17). Soit, pour $x \in B(0,R)$ et $y \in S(0,R)$, $P(x,y) = \dfrac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R|x-y|^n}$; c'est le *noyau de Poisson*. On pose $S(x) = \displaystyle\int_{S(0,R)} P(x,y)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y)$.

Les propriétés suivantes sont claires : $\Delta_x P = 0$, $\Delta S = 0$, $P, S > 0$, $P, S \in C^\infty$. Par conséquent, on a $v \in C^\infty$ et $\Delta v = 0$.

Par ailleurs, S ne dépend que de $|x|$. En effet, si $A \in \mathscr{O}(n)$, alors

$$S(Ax) = \frac{R^2 - |Ax|^2}{\sigma_n R}\int_{S(0,R)} \frac{d\mathscr{H}^{n-1}(y)}{|Ax-y|^n} = \frac{R^2 - |x|^2}{\sigma_n R}\int_{S(0,R)} \frac{d\mathscr{H}^{n-1}(y)}{|x-A^{-1}y|^n} = S(x),$$

car la mesure de Hausdorff est invariante par isométries (Exercice 1.17).

Si on pose $g(r) = S(r,0,\dots,0)$, alors $g \in C^\infty([0,R))$. Avec $r := |x| > 0$, on a $0 = \Delta S(x) = g''(r) + \dfrac{n-1}{r}g'(r)$ (*cf* Exercice 1.18). On en déduit que S est constante. Comme $S(0) = 1$, we obtient $S \equiv 1$.

Soit $\delta > 0$. Si $z \in S(0,R)$ et $x \in B(0,R)$ sont tels que $|x-z| < \delta/2$, alors

$$\int_{\{y\in S(0,R)\ ;\ |y-z|>\delta\}} P(x,y)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y) \le \frac{R^2-|x|^2}{\sigma_n R}\int_{S(0,R)} (2/\delta)^n\,d\mathscr{H}^{n-1}(y) = C_\delta(R^2-|x|^2).$$

Par conséquent, P satisfait $\displaystyle\lim_{x\to z}\int_{|y-z|>\delta} P(x,y)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y) = 0$.

Finalement, on a

$$\begin{aligned}|v(x)-g(z)| &= \left|\int_{S(0,R)} P(x,y)(g(y)-g(z))\,d\mathscr{H}^{n-1}(y)\right| \\ &\le \int_{|y-z|\le\delta} P(x,y)|g(y)-g(z)|\,d\mathscr{H}^{n-1}(y) + 2\|g\|_{L^\infty}\int_{|y-z|>\delta} P(x,y)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y),\end{aligned}$$

d'où

$$|v(x)-g(z)| \le \sup_{|y-z|\le\delta}|g(y)-g(z)| + 2\|g\|_{L^\infty}\int_{|y-z|>\delta} P(x,y)\,d\mathscr{H}^{n-1}(y). \tag{1.18}$$

Si, dans (1.18), on fait d'abord $x \to z$, puis $\delta \to 0$, on obtient $\displaystyle\lim_{x\to z} v(x) = g(z)$. □

Solution fondamentale

Cette partie sera généralisée dans le cadre de la théorie des distributions ; néanmoins, on le cadre des fonctions localement intégrables suffit pour comprendre l'idée.

La Définition 1.8 est motivée par le calcul formel suivant. On essaie de résoudre l'équation $P(\partial)u = f$, où $P(\partial)$ est un opérateur linéaire à coefficients constants de symbole $P(x)$. En prenant la transformée de Fourier, on trouve formellement $P(\imath\xi)\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$, ce qui suggère $u = E * f$ pour E tel que $\hat{E}(\xi) = 1/P(\imath\xi)$.

1.8 Définition. Une fonction $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est solution fondamentale de $P(\partial)$ si, pour tout $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u = E * f$ est solution de $P(\partial)u = f$, c'est-à-dire

$$P(\partial)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)P(\partial)f(y)\,dy = f(x), \quad \forall f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.19}$$

1.9 Proposition. *$E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est solution fondamentale de $P(\partial)$ si et seulement si*

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(-y)P(\partial)\varphi(y)\,dy = \varphi(0), \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.20}$$

Démonstration. (1.20) suit de (1.19) en prenant $f = \varphi$ et $x = 0$. Inversement, (1.20) appliquée à $y \mapsto f(y+x)$ donne, après le changement de variables $z = y + x$, (1.19). □

1.10 Définition. Soit σ_n la mesure superficielle de la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sigma_2}\ln|x| = \dfrac{1}{2\pi}\ln|x|, & \text{si } n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n|x|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}. \tag{1.21}$$

1.11 Théorème. *E est une solution fondamentale de l'équation de Laplace.*

Démonstration. En utilisant l'Exercice 1.18, on a $\Delta E = 0$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Par ailleurs, on a $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, par comparaison avec les intégrales de référence (Exercice 8.41). Par convergence dominée, on a, avec $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,\varepsilon)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(-y)\Delta\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} E(y)\Delta\varphi(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \underbrace{\int_{\Omega_\varepsilon} E(y)\Delta\varphi(y)\,dy}_{I_\varepsilon}.$$

On note que $\partial\Omega_\varepsilon = S(0,\varepsilon)$ et $\nu(y) = -\dfrac{y}{\varepsilon}$, $y \in S(0,\varepsilon)$. La deuxième formule de Green (2.2) donne

$$I_\varepsilon = -J_\varepsilon + K_\varepsilon, \text{ où } J_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_{S(0,\varepsilon)} E(y)y\cdot\nabla\varphi(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y),\ K_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int_{S(0,\varepsilon)} \varphi(y)y\cdot\nabla E(y)\,d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

Soit $f(r) := \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln r, & \text{si } n = 2 \\ -\dfrac{1}{(n-2)\sigma_n r^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$, de sorte que $E(y) = f(|y|)$. D'une part, on a

$$|J_\varepsilon| \leq |S(0,\varepsilon)||f(\varepsilon)|\|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \to 0 \quad \text{quand } \varepsilon \to 0.$$

D'autre part, on a $y \cdot \nabla E(y) = \dfrac{1}{\sigma_n|y|^{n-2}}$, d'ou (en utilisant l'Exercice 8.42)

$$K_\varepsilon = \frac{1}{\sigma_n}\int_{S(0,1)} \varphi(\varepsilon x)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sigma_n}\int_{S(0,1)} \varphi(0)\,d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \varphi(0).$$

Finalement, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(-y)\Delta\varphi(y)\,dy = \varphi(0)$, $\forall\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, la conclusion attendue. □

D'autres solutions fondamentales sont laissées en exercice ; voir les Exercices 1.22-1.24.

Exercices

1.12 Exercice. *
Hypothèse. K est le noyau de la chaleur.
Conclusion. $(\partial_t - \Delta_x)K(x,y,t) = 0$, $t > 0$, $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1.13 Exercice.
Hypothèses. $L \Subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*$. $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. K est le noyau de la chaleur.
Conclusion. Il existe $a > 0$ et C_α tels que $|\partial^\alpha_{(x,t)} K(x,y,t)| \le C_\alpha e^{-a|y|^2}$, $(x,t) \in L$, $y \in \mathbb{R}^n$.

1.14 Exercice. * Détailler la preuve du Théorème 1.4.

1.15 Exercice. * Détailler le début de la preuve de la Proposition 1.5.

1.16 Exercice. * Détailler la preuve de la Proposition 1.6.

1.17 Exercice. On se propose de montrer que la mesure de Hausdorff $\mathscr{H}^{n-1}$ sur la sphère euclidienne $S(0,r)$ est invariante par isométries, c'est-à-dire, si $f : S(0,r) \to \mathbb{R}$ est borélienne et $A \in \mathscr{O}(n)$, alors

$$\int_{S(0,r)} f \, d\mathscr{H}^{n-1} = \int_{S(0,r)} f \circ A \, d\mathscr{H}^{n-1}$$

au sens du théorème du changement de variables.

1. Soit $g(x) := f(rx/|x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Soit $U := \{x \in \mathbb{R}^n \, ; r < |x| < 2r\}$. Montrer que, au sens du théorème de changement de variables,

$$\int_U g(x)\, dx = \frac{2^n - 1}{n} r \int_{S(0,r)} f \, d\mathscr{H}^{n-1}.$$

2. Conclure.

1.18 Exercice. * Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ telle que $u(x) = g(|x|)$, $\forall x$.

1. Montrer que $g \in C^2((0,\infty))$.
2. Si on pose $r = |x|$, montrer que $\Delta u(x) = g''(r) + \dfrac{n-1}{r} g'(r)$.

1.19 Exercice. * Soit E la solution fondamentale de Δ donnée par (1.21). Montrer que $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\dfrac{x}{|x|} \cdot \nabla E(x) = \dfrac{1}{\sigma_n |x|^{n-1}}$ si $x \neq 0$.

1.20 Exercice. * Dans la formule de Poisson (1.17), on considère une donnée $f \in L^p(S(x_0,R))$, pour un $1 \le p < \infty$. On suppose, par exemple, $x_0 = 0$ et $R = 1$. On pose $u_r(x) = u(rx)$, $0 \le r \le 1$, $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer l'analogue suivant du Théorème 1.1 *2.* : $\lim_{r \nearrow 1} u_r = f$ dans $L^p(\mathbb{S}^{n-1})$.

1.21 Exercice. Soit $P(\partial)$ un opérateur non constant. Montrer que l'équation $P(\partial)u = 0$ a toujours des solutions non triviales de la forme

$$x \mapsto \exp\Big(\sum_{j=1}^k \zeta_j x_j\Big), \text{ avec } \zeta_1, \dots, \zeta_k \in \mathbb{C} \text{ convenablement choisis.}$$

1.22 Exercice. *

Hypothèse. $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(x,t) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,;\,|x|<t\}}$.

De manière équivalente, $E(x,t) = \frac{1}{2}H(t-|x|)$, où H est la fonction de Heaviside, $H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$.

Conclusion. E est solution fondamentale de l'équation des ondes $1D$, $\Box = \partial_t^2 - \partial_x^2$.

1.23 Exercice. *

Hypothèse. $E : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$.

Conclusion. E est solution fondamentale de l'équation de la chaleur $L = \partial_t - \Delta_x$.

1.24 Exercice.

Hypothèse. $E : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{4\pi\imath t}} e^{\imath|x|^2/(4t)}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$.

Conclusion. E est solution fondamentale de l'équation de Schrödinger $1D$ $S = \partial_t - \imath\partial_x^2$.

1.25 Exercice. Nous allons expliquer ici comment obtenir, par un calcul formel, la solution fondamentale de Δ dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, donnée par (1.21).

Soit E_λ la solution fondamentale de $\lambda - \Delta$ donnée par (1.15). Calculer, pour $n \geq 3$ et $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, la limite $\lim\limits_{\lambda\to 0} E_\lambda(x)$ et conclure.

1.26 Exercice. Retrouver, pour $n \geq 3$, « la » solution fondamentale de $-\Delta$ en utilisant la transformée de Fourier des noyaux de Riesz $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto |x|^{-a}$, avec $0 < a < n$.

Indications

Exercice 1.13. $\partial^\alpha_{(x,t)}K$ est une combinaison linéaire de termes de la forme $M(x,y,t) = t^r x^\beta y^\gamma e^{-|x-y|^2/(4t)}$. Par majoration brutale, on trouve $|M(x,y,t)| \leq (1+|y|)^l \exp(c|y| - b|y|^2)$, $(x,t) \in K$, $y \in \mathbb{R}^n$, avec $b > 0$. Par croissance comparée, on trouve, pour tout $a \in (0,b)$, $|M(x,y,t)| \leq C\exp(-a|y|^2)$.

Exercice 1.21. Montrer que tout polynôme non-constant de n variables à (beaucoup) de racines dans $\mathbb{C}^n$. Prendre $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ tel que $P(\imath\zeta) = 0$.

Exercice 1.24. En suivant la démarche de l'Exercice 1.23, calculer une solution fondamentale de $\partial_t - (\varepsilon + \imath)\partial_x^2$, puis faire $\varepsilon \searrow 0$.

Exercice 1.25. Faire le changement de variables $s = \dfrac{|x|^2}{4t}$. Utiliser la Proposition 8.12.