Chapitre 14

Introduction aux espaces de Hilbert

14.0 Aperçu

Dans ce mini-chapitre, marginal par rapport au sujet principal du cours, nous présentons quelques propriétés basiques des *espaces de Hilbert*, c'est-à-dire des espaces de Banach H dont la norme $\| \ \|$ est induite par un produit scalaire $< \ , >$. Pour simplifier la lecture, nous considérons systématiquement *un espace de Hilbert réel* ; le passage aux espaces complexes n'apporte pas de difficulté supplémentaire.

En dimension finie, les objets fondamentaux qui permettent de mener des calculs explicites (projection orthogonale sur un sous-espace, calcul de l'adjoint, diagonalisation des opérateurs auto-adjoints, ...) sont les *bases orthonormées*. Le passage aux espaces de dimension (algébrique) infinie pose de nombreux problèmes : par exemple, un opérateur auto-adjoint n'est plus nécessairement diagonalisable. Nous établissons ici trois résultats fondamentaux qui ne nous dépaysent pas trop et sont des pendants « infinis » de résultats rencontrés en dimension finie :

1. L'existence de la *projection orthogonale* sur un sous-espace vectoriel fermé de H (ou, plus généralement, sur une partie convexe fermée non-vide de H) ;
2. L'existence d'une *base hilbertienne* (l'analogue d'une base orthonormée en dimension infinie) dans les espaces séparables ;
3. La caractérisation des formes linéaires et continues sur H (*théorème de Riesz* 14.19).

Compétences minimales attendues.

a) Savoir utiliser l'inégalité de Bessel et l'égalité de Parseval.

b) Savoir étudier et manipuler des séries orthogonales.

c) Savoir utiliser les propriétés de l'orthogonal.

d) Savoir utiliser le théorème de Riesz 14.19. ◇

14.1 Projection sur un convexe fermé

.

14.1 Proposition. Soit C une partie convexe, fermée et non-vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul $y \in C$ tel que

$$\|x - y\| \leq \|x - z\|, \; \forall \, z \in C. \tag{14.1}$$

14.2 Définition. Le point y ci-dessus est la *projection orthogonale* de x sur C, et on note $y = p_C(x)$.

La résultat suivant donne une caractérisation utile de la projection orthogonale.

14.3 Proposition. Avec x, C comme ci-dessus, nous avons

$$y = p_C(x) \iff [y \in C \text{ et } < x - y, z - y > \leq 0, \; \forall \, z \in C]. \tag{14.2}$$

Dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel fermé F de H, nous avons

$$y = p_F(x) \iff [y \in F \text{ et } < x - y, w >= 0, \; \forall \, w \in F]. \tag{14.3}$$

14.4 Définition. Soit F une partie non-vide de H. L'*orthogonal de F* est

$$F^\perp := \{y \in H \, ; < x, y >= 0, \; \forall \, x \in F\}. \tag{14.4}$$

On vérifie aisément que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H (exercice 14.9 a)).

14.5 Théorème. Soit F un sous-espace fermé de H. Alors $F \oplus F^\perp = H$.

14.6 Corollaire. a) Si F est un sous-espace fermé de H, $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

b) Si A est une partie non-vide de H, $\left(A^\perp\right)^\perp = \overline{\text{Vect}\,(A)}$. $\diamond$

14.7 Corollaire. Soit F un sous-espace fermé non-nul de H. Alors p_F est un projecteur linéaire continu de norme 1. $\diamond$

Exercices

Cet exercice prépare la preuve de la proposition 14.3.

14.8 Exercice. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. 0 est un point de minimum de f.
2. $f'(0) \geq 0$. ◇

Cet exercice prépare la preuve du corollaire 14.6.

14.9 Exercice. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 14.1. Étape 1. Existence de la projection. Soit

$$d := d(x, C) = \inf\{\|x - z\|\,;\, z \in C\}.$$

Soit $(y_j) \subset C$ telle que $\|x - y_j\| \to d$. L'identité du parallélogramme donne (vérifier)

$$\|(y_j - y_k)/2\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y_j\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y_k\|^2 - \|x - (y_j + y_k)/2\|^2,\ \forall\, j, k. \tag{14.5}$$

C étant convexe, nous avons $(y_j + y_k)/2 \in C$, $\forall\, j, k$, d'où, en utilisant (14.5) et la définition de d,

$$\|(y_j - y_k)/2\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x - y_j\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y_k\|^2 - d \to 0 \text{ quand } j, k \to \infty. \tag{14.6}$$

De (14.6), nous avons $\lim_{j,k\to\infty}(y_j - y_k) = 0$, et donc (y_j) est une suite de Cauchy de C. H étant complet et C fermé, (y_j) converge vers un $y \in C$. Par ailleurs,

$$\|x - y\| = \lim_j \|x - y_j\| = d \leq \|x - z\|,\ \forall\, z \in C,$$

et donc y a la propriété de l'énoncé.

Étape 2. Unicité de la projection. En admettant provisoirement la proposition 14.3, si y_1, y_2 sont comme dans l'énoncé, nous avons

$$< x - y_1, y_2 - y_1 > \leq 0,$$
$$< x - y_2, y_1 - y_2 > \leq 0.$$

En additionnant les deux inégalités, nous obtenons $\|y_2 - y_1\|^2 \leq 0$, d'où $y_1 = y_2$. CQFD

Démonstration de la proposition 14.3. « $\Longrightarrow$ » Soit $z \in C$. Pour $t \in [0,1]$, nous avons $(1-t)y + tz \in C$ (par convexité de C) et donc (par définition de la projection)

$$f(t) := \|x - (1-t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2 = f(0),\ \forall\, t \in [0,1]. \tag{14.7}$$

f étant convexe et dérivable (justifier), (14.7) équivaut à $f'(0) \geq 0$ (voir l'exercice 14.8). Or, $f'(0) = 2 < x - y, y - z >$, d'où la conclusion.

« $\Longleftarrow$ » Avec les notations ci-dessus, nous avons $f'(0) \geq 0$, et donc $f(1) \geq f(0)$, ce qui revient à $\|x - z\| \geq \|x - y\|$, $\forall\, z \in C$.

Le cas particulier d'un sous-espace. « $\Longrightarrow$ » Soit $w \in F$. En prenant, dans (14.2), $z := y + w \in F$, respectivement $z := y - w \in F$, nous obtenons $< x - y, w > \leq 0$, respectivement $< x - y, -w > \leq 0$, d'où $< x - y, w >= 0$.

« $\Longleftarrow$ » Soit $z \in F$. Alors $< x - y, z - y >= 0$, car $z - y \in F$. CQFD

Démonstration du théorème 14.5. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H (exercice 14.9 a)). Par ailleurs, si $x \in F \cap F^\perp$, alors $< x, x >= 0$, et donc $x = 0$. Enfin, soient $x \in H$ et $y := p_F(x)$. La proposition 14.3 donne $x - y \in F^\perp$, et donc $x = y + (x - y) \in F + F^\perp$. CQFD

Démonstration du corollaire 14.6. a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H (exercice 14.9 a)), d'où, en appliquant deux fois le théorème 14.5, $F \oplus F^\perp = H$ et $F^\perp \oplus \left(F^\perp\right)^\perp = H$. Par ailleurs, nous avons clairement $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$, d'où l'égalité $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

b) L'exercice 14.9 b) donne $A^\perp = \overline{\text{Vect}\,(A)}^\perp$. Comme l'adhérence d'un sous-espace est encore un sous-espace (justifier), la partie a) du corollaire donne

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left(\overline{\text{Vect}\,(A)}^\perp\right)^\perp = \overline{\text{Vect}\,(A)}.$$ CQFD

Démonstration du corollaire 14.7. Soient $x_1, x_2 \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $x := x_1 + \lambda x_2$ et $y := p_F(x_1) + \lambda p_F(x_2)$, alors x et y satisfont (14.3), et donc $y = p_F(x)$. Il s'ensuit que p_F est linéaire.

Pour tout ensemble convexe, fermé et non-vide C, nous avons $p_C(x) = x$, $\forall\, x \in C$, d'où $p_C \circ p_C = p_C$. Dans le cas particulier d'un sous-espace fermé F, nous obtenons que p_F est un projecteur (linéaire).

La décomposition orthogonale $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et le théorème de Pythagore donnent

$$\|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2,$$

et donc p_F est continu, de norme ≤ 1.

F étant non-nul, il existe $x \in F \backslash \{0\}$. Pour cet x, nous avons

$$\|p_F(x)\| = \|x\| \leq \|p_F\| \|x\|,$$

d'où $\|p_F\| \geq 1$, et finalement $\|p_F\| = 1$. CQFD

14.2 Bases hilbertiennes

Dans un espace de Hilbert de dimension algébrique infinie, la notion « naturelle » de base orthonormée serait la suivante :

a) $(e_j)_{j\in J}$ (avec J famille infinie) est une base algébrique de H, c'est-à-dire tout $x \in H$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, avec un nombre fini de scalaires λ_j non-nuls (pour donner un sens à la somme).

b) La famille $(e_j)_{j\in J}$ est orthonormée, c'est-à-dire, pour $j, k \in J$, $< e_j, e_k >= 0$ si $j \neq k$, respectivement $< e_j, e_j >= 1$.

Il se trouve qu'*aucun* espace de Hilbert de dimension infinie ne possède une base orthonormée au sens de la définition naïve ci-dessus (voir l'exercice 14.17). La bonne définition d'une base garde l'exigence b), mais remplace, dans la représentation a), la somme finie par une somme infinie. Afin de simplifier la compréhension, nous considérons le cas « le moins infini possible », celui des espaces séparables, mais il faut garder à l'esprit que cette restriction n'est pas fondamentale pour l'existence d'une base hilbertienne (en général, non-dénombrable).

14.10 Théorème. On suppose H *séparable* et de *dimension infinie*. Alors il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$x = \sum_{n\geq 1} < x, e_n > e_n, \ \forall\, x \in H. \tag{14.8}$$

14.11 Définition. Une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ comme dans le théorème 14.2 est une *base hilbertienne* de H.

14.12 Corollaire. Si $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de H, nous avons

$$\|x\|^2 = \sum_{n\geq 1} < x, e_n >^2, \ \forall\, x \in H \text{ (égalité de Parseval).} \tag{14.9}$$

En lien avec le corollaire 14.12, voir les exercices 14.14 et 14.15.

Le résultat suivant donne une définition alternative d'une base hilbertienne.

14.13 Proposition. Une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de H si et seulement si :

(i) La suite est orthonormée.

(ii) L'espace vectoriel engendré par la suite est dense dans H.

De manière équivalente, $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de H si et seulement si nous avons (i) et

(ii') Si $< x, e_n >= 0$, $\forall\, n$, alors $x = 0$. ◇

Exercices

14.14 Exercice. Soit $(e_j)_{j\geq 1}$ une famille orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j\geq 1} a_j e_j \text{ converge } \iff \sum_{j\geq 1} a_j^2 < \infty.$$

En cas de convergence de la série, montrer que $\left\|\sum_{j\geq 1} a_j e_j\right\|^2 = \sum_{j\geq 1} a_j^2$. ◇

14.15 Exercice. Soit $(e_j)_{1\leq j<N} \subset H$ (avec $N = 2, 3, \ldots, \infty$) une suite orthonormée d'une espace pré-hilbertien H. Montrer que

$$\sum_{1\leq j<N} < x, e_j >^2 \leq \|x\|^2,\ \forall\, x \in H \text{ (inégalité de Bessel).}$$ ◇

14.16 Exercice. Avec les notations du chapitre 12, montrer que $(x \mapsto e^{\imath nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[)$. ◇

14.17 Exercice. Soit H un espace préhilbertien ayant une base algébrique orthonormée infinie $\mathscr{B}$. Montrer que H n'est pas complet.
Indication : soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{B}$ une suite orthonormée. Soit $x_n := \sum_{j=1}^{n} (1/j^2) e_j$, $\forall\, n \geq 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, mais ne converge pas. ◇

Cet exercice éclaire l'énoncé de la proposition 14.13.

14.18 Exercice. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. F est dense dans H.
2. $F^\perp = \{0\}$. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 14.10. Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ une partie dénombrable et dense de H. Soit $E_k := \text{Vect}\,(\{a_1, \ldots, a_k\})$, $\forall\, k \geq 1$. Nous avons $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ et $\dim E_{k+1} - \dim E_k \leq 1$, $\forall\, k \geq 1$.

Étape 1. La suite $(E_k)_{k\geq 1}$ n'est pas stationnaire. En effet, sinon il existe k tel que $E_\ell = E_k$, $\forall\, \ell \geq k$, et dans ce cas tous les points de A appartiennent à E_k. Il ensuit que (justifier) $H = \overline{A} \subset \overline{E_k} = E_k$, impossible, car H est de dimension infinie.

Étape 2. Construction par récurrence des vecteurs e_n, $n \geq 1$. Si E_k est le premier espace non-nul, alors $\dim E_k = 1$ et nous choisissons un vecteur normé $e_1 \in E_k$. En supposant construits $e_1, \ldots, e_n$ qui forment une base orthonormée de E_ℓ, nous considérons le premier $j > \ell$ tel que $E_j \neq E_\ell$ (un tel j existe, *cf* la première étape). Nous avons $\dim E_j - \dim E_\ell = 1$. Nous pouvons donc compléter $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à une base orthonormée

$\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ de E_j. Notons que, grâce à l'étape 1 et par construction, $(e_n)_{n\geq 1}$ est une suite (infinie) orthonormée.

Étape 3. Preuve de (14.8). Soient $x \in H$ et $\varepsilon > 0$. Soit $a_k \in A$ tel que

$$\|x - a_k\| < \varepsilon/2. \tag{14.10}$$

Si $n \geq k$, nous avons $a_k \in \text{Vect}\,(\{e_1, \ldots, e_n\})$ (justifier), et donc

$$a_k = \sum_{1\leq j\leq n} < a_k, e_j >, \ \forall\, n \geq k. \tag{14.11}$$

En combinant (14.11) avec l'inégalité de Bessel (exercice 14.15) et (14.10), nous obtenons, pour tout $n \geq k$,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > -x >\right\| \leq & \left\|\sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > -a_k\right\| + \|x - a_k\| \\ = & \left\|\sum_{1\leq j\leq n} < x - a_k, e_j >\right\| + \|x - a_k\| \\ < & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

d'où (14.8). CQFD

Preuve du corollaire 14.12. La continuité de la norme, (14.8) et le théorème de Pythagore donnent

$$\|x\|^2 = \lim_n \left\|\sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > e_j\right\|^2 = \lim_n \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j >^2 = \sum_{n\geq 1} < x, e_n >^2. \qquad \text{CQFD}$$

Preuve de la proposition 14.13. Soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit

$$G := \text{Vect}\,(\{e_n\,;\, n \geq 1\}).$$

« (14.8) $\implies$ (ii) » Si $x \in H$, alors $y_n := \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > e_j \in G$, $\forall\, n \geq 1$, et $y_n \to x$, d'où $x \in \overline{G}$, ce qui implique $\overline{G} = H$.

« (ii) $\implies$ (ii') » L'exercice 14.9 b), (ii) et le théorème 14.5 donnent

$$\begin{aligned}[< x, e_n >= 0, \forall\, n \geq 1] &\iff x \in \{e_n\,;\, n \geq 1\}^\perp \iff x \in \overline{G}^\perp \iff x \in H^\perp = \{0\} \\ &\iff x = 0.\end{aligned}$$

« (ii') $\implies$ (14.8) » L'inégalité de Bessel (exercice 14.15) et l'exercice 14.14 implique l'existence de

$$y := \sum_{n\geq 1} < x, e_n > e_n = \lim_k \underbrace{\sum_{1\leq j\leq k} < x, e_j > e_j}_{:=y_k}. \tag{14.12}$$

Si $k \geq n$, nous avons $< y_k, e_n >=< x, e_n >$, d'où

$$< x - y, e_n >= \lim_k < x - y_k, e_n >= \lim_k 0 = 0, \ \forall\, n \geq 1. \tag{14.13}$$

De (14.13) et (ii'), nous trouvons que $x = y$. Nous concluons grâce à (14.12). CQFD

14.3 Théorème de représentation de Riesz

14.19 Théorème. (Théorème de Riesz) Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. Alors il existe $a \in H$ tel que

$$\varphi(x) =< x, a >, \ \forall\, x \in H. \tag{14.14}$$

Et réciproquement.

De plus, nous avons

$$\|\varphi\| = \|a\|. \tag{14.15}$$

Exercices

14.20 Exercice. Montrer que

$$\|x\| = \max\{< x, y > ; \, y \in H, \|y\| \leq 1\}, \ \forall\, x \in H. \qquad \diamond$$

Démonstrations

Démonstration du théorème 14.19. Étape 1. Existence de a et preuve de (14.15). Si $\varphi = 0$, $a = 0$ convient. Si $\varphi \neq 0$, soit $F := \operatorname{Ker} \varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$, qui est un sous-espace fermé de H (justifier). Soit $b \in H$ tel que $\varphi(b) = 1$ (justifier l'existence d'un tel b). Soient $c := p_F(b)$ et $d := b - c \neq 0$. Notons que $\varphi(d) = \varphi(b) = 1$ et $\varphi(x - \varphi(x)d) = 0$, $\forall\, x \in H$ (et donc $x - \varphi(x)d \in F$, $\forall\, x \in H$). Si $x \in H$, nous avons (grâce à (14.3))

$$< x, d >=< \underbrace{x - \varphi(x)d}_{\in F}, \underbrace{d}_{=b-p_F(b)} > + < \varphi(x)d, d >= \varphi(x)\|d\|^2,$$

et donc $a := d/\|d\|^2$ convient.

L'égalité (14.15) suit de l'exercice 14.20.

Étape 2. Assertion réciproque. Clairement, $H \ni x \mapsto < x, a >$ est linéaire et, de l'exercice 14.20, continue de norme $\|a\|$. CQFD

14.4 Pour aller plus loin

L'étude des espaces de Hilbert sera poursuivie dans l'UE d'Analyse fonctionnelle en master 1. Une excellente référence est Brezis [5].

Les bases hilbertiennes jouent un rôle important dans l'analyse des espaces de Hilbert et au-delà (analyse numérique, étude des espaces L^p et d'autres espaces de fonctions). Parmi les plus célèbres, notons celle de Haar, Hermite, Laguerre, Legendre et Walsh, dont la construction sera étudiée en master.

Pour conclure ce chapitre, nous ouvrons ici plutôt une perspective non-hilbertienne, dans le prolongement du théorème de représentation de Riesz. La preuve de ce théorème repose sur deux ingrédients :

a) On peut projeter sur un ensemble convexe, fermé et non-vide de H.

b) L'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \|u + tv\|$, avec $u, v \in H$ et $u \neq 0$, est dérivable en $t = 0$.

Le résultat suivant (voir Willem [20, Chapitre IV, Section 14] pour un énoncé voisin) permet d'obtenir une conclusion similaire à celle du théorème de représentation de Riesz *dans le cadre des espaces de Banach*.

14.21 Théorème. (Théorème de représentation de James) Soit $H \neq \{0\}$ un espace *de Banach* avec les propriétés a) et b) ci-dessus. Si $\varphi : H \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire et continue, alors il existe $u \in H \setminus \{0\}$ tel que

$$\varphi(x) = \|\varphi\| \left[\frac{d}{dt}\|u + tx\|\right]_{t=0}, \ \forall\, x \in H. \qquad \diamond \ (14.16)$$

De manière remarquable, ce théorème s'applique aux espaces L^p avec $1 < p < \infty$. Pour ces espaces, la formule (14.16) donne le théorème de représentation de Riesz 10.30 a).