

Contrôle continu no 1

– le 21 octobre 2016, de 16 h 15 à 17 h 15 –

Pas de document, pas de calculatrice, téléphone portable ou autre appareil électronique.

Exercice 1 (6 p.). Étudier la nature (convergente, divergente, n'existe pas) des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \sin(1/x^2) dx \text{ (2 p.)}, \int_0^\infty x^a e^{-x} dx \text{ (4 p.)}.$$

[Indication. Pour la deuxième intégrale, on discutera la nature en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$. Pour l'étude de l'intégrale entre 0 et 1, il convient de distinguer les cas $a > -1$ et $a \leq -1$. Dans l'étude de l'intégrale de 1 à ∞ , la valeur de a ne joue pas.]

Exercice 2. (8 p.) Soit F la fonction définie sur $[0, \infty[$ par $F(x) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 e^{-tx} dt$.

1. Montrer que F est continue sur $[0, \infty[$. (2 p.)
2. Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0, \infty[$. (4 p.)
3. Montrer que $F''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2 + 4)}$. (1 p.)

$$\left[\text{Indication : utiliser l'identité } \sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{4}. \right]$$

4. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$. (1 p.)

Exercice 3. (6 p.) Utiliser la transformation de Fourier pour résoudre l'équation de la corde vibrante

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, & \text{pour } t \geq 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = 0, & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = w(x), & \text{pour } x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

[Indications. Considérer la fonction $v(\xi, t)$, qui à t fixé est la transformée de Fourier dans la variable x de la fonction $u(x, t)$. Par ailleurs, la transformée de Fourier de la fonction

$$f_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \text{ est}$$

$$\widehat{f}_a(\xi) = 2 \frac{\sin(a\xi)}{\xi}.$$