

Contrôle terminal

– le 12 janvier 2017, de 8 h à 10 h –

Pas de document, pas de calculatrice, de téléphone portable ou d'autre appareil électronique.

Une partie significative de la note sera attribuée à la justification rigoureuse des calculs.

Exercice 1. (2 p.) Étudier la nature (convergente, divergente, n'existe pas) de l'intégrale généralisée $\int_0^1 \sin(1/x^2) dx$.

Exercice 2. (3 p.) Calculer les primitives de la distribution T_f , avec $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Exercice 3. (4 p.) Calculer $\int_{\mathcal{C}(0,1)} \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 dz$.

Indication : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Exercice 4. (5 p.) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{-|x|}$.

Exercice 5. (6 p.) Calculer $\widehat{\frac{x}{x^2+1}}$ et $\widehat{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

Indications. On rappelle que $\widehat{\frac{1}{x^2+1}}(\xi) = \pi e^{-|\xi|}$. On rappelle aussi la formule $\widehat{xT} = i\widehat{T}'$, $\forall T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
