

Résumé cours Maths 4 du 2 octobre 2015

1. Définition de $\rho_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\rho(t/\varepsilon)$, $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, et esquisse de son graphe.
2. Énoncé vague : si $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) dt = 1$, alors $f * \rho_\varepsilon \rightarrow f$, $f * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon \rightarrow f, \dots$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et ces fonctions sont de plus en plus lisses :
 - $f * \rho_\varepsilon$ est continue, et si f est déjà continue alors $f * \rho_\varepsilon$ est de classe C^1 ;
 - $f * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$ est de classe C^1 , et si f est déjà continue alors $f * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$ est de classe C^2 , etc.

Nous n'avons pas précisé toutes les hypothèses sur f et ρ , ni le sens de la convergence.

3. La propriété ci-dessus s'applique pour "lisser" un signal.

4. Exemple travaillé : $f(t) = |t|$, $\rho(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1 \\ 1/2, & \text{si } -1 \leq t \leq 1. \\ 0, & \text{si } t > 1 \end{cases}$

5. Exemple laissé en devoir maison : même ρ , et $f =$ la fonction de Heaviside, c-à-d $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Calculer $f * \rho_\varepsilon$ et $f * \rho_\varepsilon * \rho_\varepsilon$ et examiner graphiquement ce qui se passe quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Chapitre 2. Transformations (transformées) de Fourier et de Laplace

1. Définition de $\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$, $f \in L^1(\mathbb{R})$. (NB : x et non pas t , car x est une variable spatiale.)
2. Calcul de $\widehat{e^{-|x|}}$.
3. Calcul de $\widehat{\rho}$, où ρ est la fonction du point 4 ci-dessus.
4. $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$, avec une idée de preuve.
5. $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$ si $f \in C^1$, $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f' \in L^1(\mathbb{R})$.
6. $\widehat{xf}(\xi) = i \widehat{f'}(\xi)$, si $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $xf \in L^1(\mathbb{R})$, avec une idée de preuve si f est continue et s'annule en dehors d'un intervalle $[a, b]$.

7. $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\xi)$ (avec preuve).

8. Théorème d'inversion (ou formule d'inversion) : si $f \in L^1(\mathbb{R})$, $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ et f est continue, alors $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi$.

9. Application : calcul de $\widehat{\frac{1}{1+x^2}}(\xi)$.