# Cours du 29 septembre 2016

## Chapitre 1. Intégration

**IV. Intégrales à paramètre.** Contexte : étudier les propriétés de $F(x) := \int_a^b f(x,t)\,dt$, avec paramètre $x \in J$, et variable d'intégration $t \in I$, avec $I$ intervalle d'extrémités $a$ et $b$.

**Théorème de continuité.** Si
- $f$ est continue ;
- $|f(x,t)| \le g(t)$, $\forall\, x \in J, \forall\, t \in I$ ;
- $\int_a^b g(t)\,dt < \infty$,

alors $F$ est continue.

Si, de plus, $\alpha$ est une extrémité de $J$, alors

$$\lim_{x\to\alpha} F(x) = \int_a^b \lim_{x\to\alpha} f(x,t)\,dt.$$

**Théorème de dérivabilité.** Si, en plus des hypothèses du théorème précédent
- $f \in C^1$ ;
- $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le h(t)$, $\forall\, x \in J, \forall\, t \in I$ ;
- $\int_a^b h(t)\,dt < \infty$,

alors $F \in C^1$ et $F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$ (« la dérivée de l'intégrale par rapport au paramètre est l'intégrale de la dérivée par rapport au paramètre »).

## Chapitre 2. Produit de convolution. Transformée de Fourier

1. Définitions :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(x-t)\,dt,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

et

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath\,\xi\,x}\,f(x)\,dx,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}.$$

2. Espace $L^1(\mathbb{R})$ (et plus généralement $L^1(I)$, avec $I$ intervalle). Conditions d'existence de $f * g$ et de $\widehat{f}$.
3. Continuité de $\widehat{f}$ pour $f \in L^1(\mathbb{R})$. Lemme de Riemann-Lebesgue.
4. Transformée de Fourier d'une gaussienne.
5. Propriétés de base du produit de convolution.