UCBL 2015/2016 - Semestre d'automne - UE Math 4

Fiche : Holomorphie, Equations de Cauchy–Riemann

Exercice 1. Montrer directement, puis à l'aide des équations de Cauchy-Riemann, que les fonctions suivantes sont holomorphes :

1. $z \mapsto z^k$ sur $\mathbb{C}$ pour k entier naturel fixé,
2. $z \mapsto 1/z^k$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pour k entier strictement positif.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des points où les fonctions suivantes sont dérivables au sens complexe (on procèdera directement puis à l'aide des équations de Cauchy-Riemann) :

1. $z \mapsto \overline{z}$;
2. $z \mapsto |z|^2$;
3. $z \mapsto z + \overline{z}$;
4. $z \mapsto z - \overline{z}$;
5. $z \mapsto 1/(1-z)$.

Exercice 3. Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on définit

$$\exp(z) := \exp(x)(\cos y + i \sin y),$$

puis

$$\cos(z) := \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}),$$

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z})$$

$$\sin(z) := \frac{-i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

et

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}).$$

Montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes et calculer leur dérivée complexe :

a) $\exp, \cos, \sin, \cosh, \sinh.$

b) $z = (x, y) \mapsto \log(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)) + i \arctan(y/x)$ sur $\{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$.