

Exercices sur les intégrales, la convolution et les transformations de Fourier et de Laplace

1. Étudier la nature (convergente, divergente, n'existe pas) des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_0^1 \ln x \sin x dx, \int_0^1 \sin(1/x^2) dx, \int_0^\infty x^a e^{-x} dx \text{ (avec } a \in \mathbb{R} \text{ paramètre), } \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

$$\int_1^\infty \frac{1 - \sin x}{x} dx, \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx, \int_{-\infty}^\infty x dx, \int_0^{1/2} \frac{1}{\sin x \ln^2 x} dx.$$

2. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que F et G sont dérivables sur $[0, \infty[$.

2. Montrer que $F'(x) + G'(x) = 0$ pour $x \geq 0$. [Indication : faire un changement de variable dans l'une des intégrales apparaissant dans la formule de $F'(x) + G'(x)$.] Que peut-on donc dire de $F(x) + G(x)$?

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} G(x)$.

4. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.

5. En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty e^{-t^2} dt$, ainsi que la valeur de $J = \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2/2} dt$.

3. Soit F la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $F(x) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 e^{-tx} dt$.

1. Montrer que F est continue sur $[0, \infty[$ et deux fois dérivable sur $]0, \infty[$.

2. Montrer que $F''(x) = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2(x^2 + 4)}$.

[Indication : utiliser l'identité $\sin^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2} = \frac{2 + e^{2it} + e^{-2it}}{4}$.]

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ et que $\lim_{x \rightarrow \infty} F'(x) = 0$.

4. Utiliser les questions 2 et 3 pour calculer $F'(x)$.

5. Utiliser les questions 4 et 5 pour calculer $F(x)$. [Indication : intégrer par parties, avec $u(x) = x$.]

4. Calculer les quantités suivantes :

$$\sum_{n=3}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{t}{(1+t)^n} dt, \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \int_1^{\infty} \frac{t+2}{(1+t)^n} dt, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{nt \sin t}{1+(nt)^a} dt \text{ (avec } a \geq 1 \text{ paramètre).}$$

5. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1. P_{2a} . Rappelons que $P_{2a}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } -a \leq x \leq a \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$.

2. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

3. $f(x) = x e^{-|x|}$.

4. $f(x) = x e^{-x^2}$.

6. Une fonction f qui n'est pas la fonction nulle est intégrable et vérifie $\hat{f} = C f$, avec C constante.

1. Montrer que f vérifie les hypothèses du théorème d'inversion de Fourier.
2. Montrer que $f \in L^2(\mathbb{R})$.
3. Calculer les valeurs possibles de C .
4. Donner un exemple de telle fonction.