

Feuille 2 de TD. Intégrales et limites. Intégrales à paramètre

1. Déterminer la limite simple des suites suivantes :

$$\frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)}, t \geq 0; \frac{1}{t^n + e^t}, t \geq 0; \frac{n \ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2}, t \geq 0.$$

2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{\cos nt}{(nt+1)(1+t^2)} dt; \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1}{t^n + e^t} dt; \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{n \ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2} dt.$$

3. On considère la fonction F donnée par la formule

$$F(x) := \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + x^2}, \forall x > 0.$$

- (i) Montrer que F est finie et continue.
- (ii) Montrer que F est dérivable et calculer F' .
- (iii) Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.
- (iv) Calculer $F(x)$ en fonction de fonctions connues et retrouver les résultats qui précèdent.

4. On considère la fonction F donnée par la formule

$$F(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-t} \sin tx}{1+t^4} dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (i) Montrer que F est finie et continue.
- (ii) Montrer que F est indéfiniment dérivable.
- (iii) Calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.
- (iv) Montrer que F vérifie $F^{(4)} + F = \frac{x}{1+x^2}$.