Analyse T4, TD n° 2 / Vendredi 23 septembre 2016

Limites d'intégrales

1. Convergence dominée, convergence monotone.

2. Exercices corrigés.

Pierre-Jean Hormière

---

1. <u>Théorèmes de convergence dominée, convergence monotone</u>.

1.1. <u>Convergence simple</u>.

Soient I un intervalle de **R**, (f_n) une suite de fonctions de I dans **R** ou **C**. On dit que la suite (f_n) **converge simplement** vers la fonction f si $\forall x \in I \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.

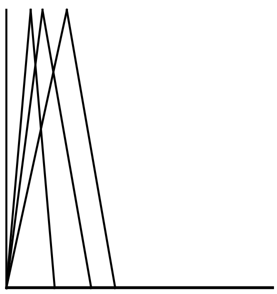
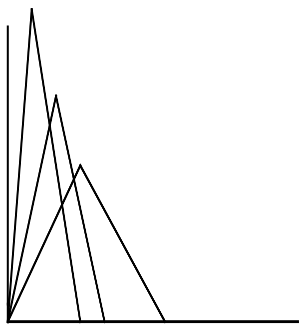
<u>**Exemples**</u> **:**

1) Soit f_n la fonction caractéristique de $[n, n+1]$. La suite (f_n) tend simplement vers 0 sur **R** (mais pas uniformément). Plus généralement, si φ est une fonction ≠ 0, nulle hors de [a, b], la suite $f_n(x) = \varphi(x-n)$ de ses translatées converge simplement vers 0. Le même résultat subsiste si φ est une fonction ≠ 0, tendant vers 0 en ±∞.

2) Dans l'exemple précédent le domaine de définition était **R**. Plaçons-nous sur [0, 1]. Soit f_n la fonction caractéristique de $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. La suite (f_n) tend simplement vers 0 sur [0, 1], mais pas uniformément. De même pour les fonctions continues affines par morceaux "en pics" :

$g_n(x) = 2nx$ si $0 \le x \le \frac{1}{2n}$, $g_n(x) = 2 - 2nx$ si $0 \le x \le \frac{1}{2n}$, $g_n(x) = 0$ si $0 \le x \le \frac{1}{2n}$,

et pour la suite de fonctions $h_n = n\, g_n$.

3) Considérons la suite de polynômes $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$. Elle converge simplement sur **R** vers la fonction exponentielle.

1.2. <u>Passage à la limite dans les intégrales</u>.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans **R** ou **C**, tendant simplement vers une fonction f continue par morceaux.

Si les intégrales $\int_I f_n(x).dx$ convergent, l'intégrale $\int_I f(x).dx$ converge-t-elle, et a-t-on

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x).dx = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n(x).dx = \int_I f(x).dx \ ?$$

Autrement dit, peut-on passer à la limite dans l'intégrale ?

La réponse est négative en général, mais positive sous certaines hypothèses additionnelles.

1.3. Deux théorèmes.

Rappelons qu'une fonction φ : I → **R** ou **C** continue par morceaux est dite intégrable sur l'intervalle I si l'intégrale $\int_I \varphi(x).dx$ est absolument convergente.

L'énoncé suivant est un corollaire d'un théorème démontré par Henri Lebesgue entre 1901 et 1905.

Théorème 1 : convergence dominée.

Soient I un intervalle quelconque, (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans **R** ou **C**. On suppose :

(CS) La suite (f_n) converge simplement dans I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;

(D) Il existe une fonction φ continue par morceaux intégrable sur I telle que :

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \quad (\forall x \in I) \quad |f_n(x)| \le \varphi(x) .$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et :

$$\int_I f(x).dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x).dx .$$

Attention, la convergence simple seule n'autorise pas à échanger les limites. Il faut lui adjoindre l'existence d'une majorante intégrable φ. Voir exercice 2 ci-dessous.

L'énoncé suivant est un corollaire d'un théorème démontré par l'italien Beppo Levi.

Théorème 2 : convergence monotone.

Soit (f_n) une suite croissante de fonctions à valeurs réelles continues par morceaux et intégrables sur I, convergeant simplement dans I vers une fonction f continue par morceaux sur I. Alors f est intégrable si et seulement si la suite $(\int_I f_n)$ est majorée. Dans ces conditions :

$$\int_I f(x).dx = \sup_{n\in \mathbf{N}} \int_I f_n(x).dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x).dx .$$

2. Exercices corrigés.

Exercice 1 : calcul de l'intégrale de Gauss $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

a) Montrer que e^{-x^2} est intégrable sur **R**.

On rappelle l'équivalent de Wallis $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t.dt \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

b) Montrer que $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(1+\frac{x^2}{n})^n}$; en déduire cette valeur.

c) Montrer que $\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} (1 - \frac{x^2}{n})^n.dx$; en déduire cette valeur.

__Solution__ :

a) $h(x) = e^{-x^2}$ est continue positive et intégrable car $h(x) \le \frac{1}{1+x^2}$, ou encore car $h(x) \le e^{-|x|}$ si $|x| \ge 1$.

b) Considérons la suite de fonctions $f_n(x) = \frac{1}{(1+\frac{x^2}{n})^n}$.

Ces fonctions sont toutes intégrables et convergent simplement vers la fonction $h(x) = \exp(-x^2)$.

De plus $0 \le f_n(x) \le f_1(x)$. Le TCD s'applique.

On peut même montrer que $f_n(x)$ tend en décroissant vers $h(x)$.

Le changement de variable $x = \sqrt{n}\ \tan \varphi$, ou plutôt $\varphi = \text{Arctan}\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ ramène à des Wallis :

$$J_n = \int_{\mathbf{R}} \frac{dx}{(1+\frac{x^2}{n})^n} = 2\sqrt{n}\int_0^{\pi/2}\cos^{2(n-1)}\varphi.d\varphi \sim 2\sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-2)}} \sim \sqrt{\pi}\,.$$

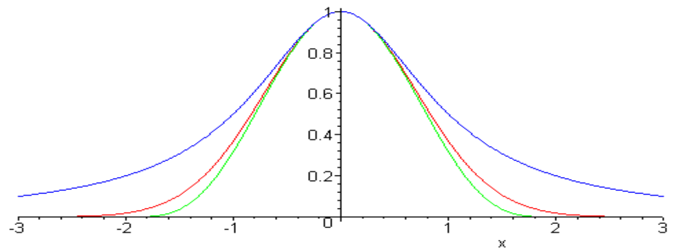
c) Considérons la suite de fonctions $g_n(x) = (\,1 - \frac{x^2}{n})^n$ pour $|x| \le \sqrt{n}$, $g_n(x) = 0$ sinon.

Ces fonctions tendent simplement vers $h(x)$. De plus $0 \le g_n(x) \le h(x)$, qui est intégrable.

Le changement de variable $x = \sqrt{n}\ \sin \varphi$, ou plutôt $\varphi = \text{Arcsin}\dfrac{x}{\sqrt{n}}$ ramène aussi à des Wallis.

On peut montrer que $g_n(x)$ tend en croissant vers $h(x)$.

d) ***La remarque qui tue***… L'encadrement $g_n(x) \le h(x) \le f_n(x)$ permet de conclure via les gendarmes, sans utiliser le moindre théorème.



<u>Exercice 2</u> : Étudier la suite de fonctions suivantes : $f_n(x) = n^a.x\,e^{-nx}$ sur $\mathbf{R}_+$.
Le théorème de convergence dominée s'applique-t-il ?

<u>Solution</u> :

1) <u>Convergence simple</u>.

Fixons $x > 0$. $f_n(x) \to 0$ par comparaison exponentielle-puissance. Et $f_n(0) = 0$.

Ainsi, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

2) Chacune des intégrales $I_n = \int_0^{+\infty} n^a x e^{-nx}.dx$ converge, et se calcule.

Le chgt de variable $nx = t$ donne $I_n = n^{a-2}\int_0^{+\infty} te^{-t}.dt = n^{a-2}$.

Si $a > 2$, (I_n) tend vers $+\infty$. Si $a = 2$, (I_n) tend vers 1. Si $a < 2$, (I_n) tend vers 0.

Conclusion : la convergence simple seule ne suffit pas à assurer que

$$\int_I f(x).dx = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x).dx\,.$$

<u>Exercice 3</u> : Trouver les limites simples des suites de fonctions suivantes :

$$f_n(t) = \frac{\cos(nt)}{(nt+1)(1+t^2)}\ (t \ge 0)\ ,\ g_n(t) = \frac{1}{t^n+e^t}\ (t \ge 0)\ ,\ h_n(t) = \frac{n.\ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2}\ (t \ge 0)$$

<u>Solution</u> :

a) Fixons $t > 0$. $|\,f_n(t)\,| \le \dfrac{1}{(nt+1)(1+t^2)} \to 0$. Et $f_n(0) = 1$.

Ainsi la suite $(\,f_n)$ tend simplement vers la fonction f définie par $f(t) = 0$ pour $t > 0$, $f(0) = 1$.

b) Fixons $t \ge 0$. $g_n(t) = \dfrac{1}{t^n+e^t} \to 0$ si $t > 1$, $\dfrac{1}{1+e}$ si $t = 1$, $\dfrac{1}{e^t} = e^{-t}$ si $0 \le t < 1$.

Ainsi la suite (g_n) tend simplement vers la fonction g définie par

$g(t) = e^{-t}$ si $0 \le t < 1$, $g(1) = \dfrac{1}{1+e}$, $g(t) = 0$ pour $t > 1$.

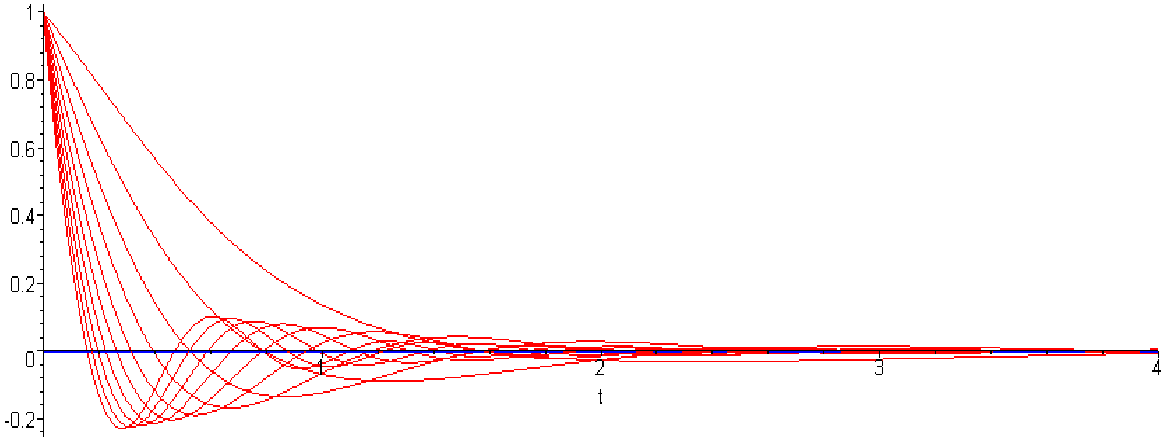
c) Fixons $t \ge 0$. $h_n(t) = \dfrac{n.\ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2} \to h(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$.

Avec Maple :

```
> with(plots):
> f:=(n,t)->cos(n*t)/((n*t+1)*(1+t^2));p:=n->plot(f(n,t),t=0..4):
```

$$f := (n, t) \to \frac{\cos(t\,n)}{(t\,n+1)\,(1+t^2)}$$

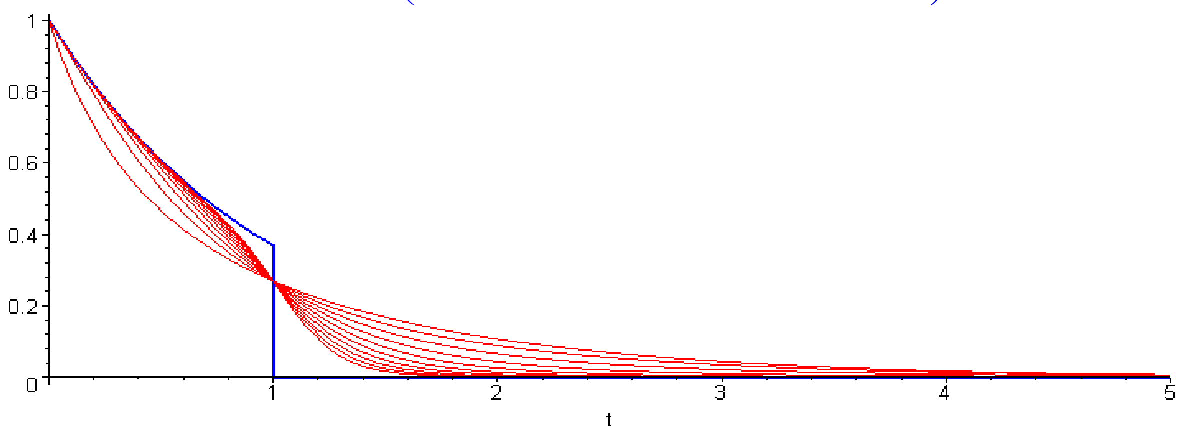
```
> display({plot(0,t=0..4,thickness=2,color=blue),seq(p(n),n=1..10)});
```



```
> g:=(n,t)->1/(t^n+exp(t));q:=n->plot(g(n,t),t=0..5):
G:=t->piecewise(t>1,0,t=1,1/(1+exp(1)),0 <= t and t < 1, exp(-t));
GG:=plot(G(t),t=0..5,thickness=2,color=blue):
display({GG,seq(q(n),n=1..10)});
```

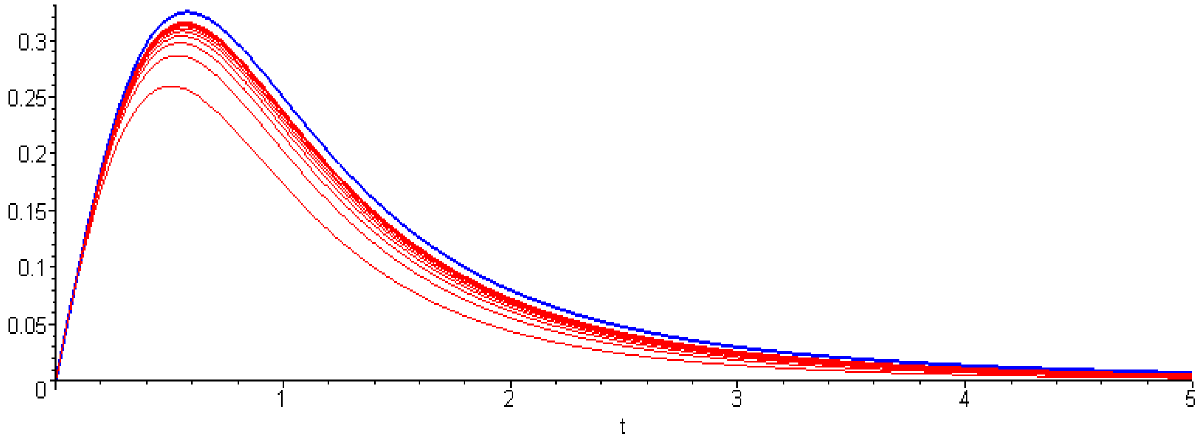
$$g := (n, t) \to \frac{1}{t^n + \mathbf{e}^t}$$

$$G := t \to \operatorname{piecewise}\left(1 < t, 0, t = 1, \frac{1}{1+\mathbf{e}}, 0 \le t \text{ and } t < 1, \mathbf{e}^{(-t)}\right)$$



```
> h:=(n,t)->n*ln(1+t/n)/(1+t^2)^2;r:=n->plot(h(n,t),t=0..5):
H:=t->t/(1+t^2)^2;HH:=plot(H(t),t=0..5,thickness=2,color=blue):
display({HH,seq(r(n),n=1..10)});
```

$$h := (n, t) \to \frac{n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2} \qquad H := t \to \frac{t}{(1+t^2)^2}$$



Exercice 4 : Calculer les limites des suites d'intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{(nt+1)(1+t^2)}.dt \quad , \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^n+e^t} \quad , \quad K_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2}.dt \, .$$

Solution :

a) Fixons t ≥ 0. $| f_n(t) | \le \frac{1}{(nt+1)(1+t^2)} \le \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$, fonction intégrable.

Le TCD s'applique et donne $I_n \to 0$.

b) Fixons t ≥ 0. $0 \le g_n(t) = \frac{1}{t^n+e^t} \le e^{-t} = \varphi(t)$, fonction intégrable.

Le TCD s'applique et donne $J_n \to \int_0^1 e^{-t}.dt = 1 - e^{-t}$.

c) Fixons t ≥ 0. $0 \le h_n(t) = \frac{n.\ln(1+t/n)}{(1+t^2)^2} \le \frac{t}{(1+t^2)^2} = \varphi(t)$, fonction intégrable.

En vertu du TCD, $K_n \to \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}.dt = \int_0^{+\infty} \frac{du}{2(1+u)^2} = \frac{-1}{2(1+u)}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$ (chgt de var $u = t^2$).